

## 第5章 振動（その2）

### 5.4 数学的準備：2階線形微分方程式

この節では  $a, b, c$  を定数とし、未知の関数  $x(t)$  に関する微分方程式

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (5.1)$$

の一般解を求めよう。この方程式と並行して  $\lambda$  の2次方程式

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (5.2)$$

を考えるが、これを微分方程式 (5.1) の特性方程式と呼ぶ。特性方程式 (1) の解は判別式  $D = b^2 - 4ac$  のとる値によって次のように分類できる。

- $D = b^2 - 4ac > 0$  の場合には二つの実数解。
- $D = b^2 - 4ac < 0$  の場合には互いに共役な虚数解
- $D = b^2 - 4ac = 0$  の場合には重解

微分方程式 (5.1) の一般解も特性方程式 (5.2) の解に準じて3つの場合に分けて求めることができる。

#### 5.4.1 $D = b^2 - 4ac > 0$ の場合

このときの二つの実数解を  $\lambda_1, \lambda_2$  としよう。このとき関数  $e^{\lambda_1 t}$  と  $e^{\lambda_2 t}$  のどちらも微分方程式 (5.1) を満たす独立な解である。これから微分方程式 (5.1) の一般解は  $C_1, C_2$  を任意定数として、

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5.3)$$

であることがわかる。

#### 5.4.2 $D = b^2 - 4ac < 0$ の場合

このときの特性方程式 (5.2) の解を  $\lambda_1, \lambda_2$  とし、

$$\lambda_1 = p + iq \quad (5.4)$$

$$\lambda_2 = p - iq \quad (5.5)$$

とおこう。このとき関数

$$e^{pt} \cos qt \quad (5.6)$$

と

$$e^{pt} \sin qt \quad (5.7)$$

のどちらも微分方程式 (5.1) を満たすことがわかる。それらが独立なことは自明なので、微分方程式 (5.1) の一般解は  $C_1, C_2$  を任意定数として、

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{pt} \{C_1 \cos qt + C_2 \sin qt\} \\ &= e^{-\frac{b}{2a}t} \times \\ &\quad \left\{ C_1 \cos \frac{\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a}t \right\} \end{aligned}$$

であることがわかる。

#### 5.4.3 $D = b^2 - 4ac = 0$ の場合

このときの重解を  $\lambda_1$  とすると、関数  $e^{\lambda_1 t}$  が微分方程式 (5.1) を満たすこと、およびもうひとつの解が  $te^{\lambda_1 t}$  であることがすぐにわかる。これから、微分方程式 (5.1) の一般解は  $C_1, C_2$  を任意定数として、

$$x(t) = \{C_1 + C_2 t\} e^{\lambda_1 t} \quad (5.8)$$

となる。

### 5.5 減衰振動

$x$  軸上を運動する質量  $m$  の物体が復元力 ( $-kx$ ) の他に速度に比例する抵抗力 ( $-r\dot{x}$ ) をうける場合、振動は弱められ減衰することが予想される。これを**減衰振動**と呼ぶ。

このときの運動方程式は

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx \quad (5.9)$$

すなわち、

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \quad (5.10)$$

前節でこの微分方程式の一般解を学んだ。ここでは、便宜上、 $r/2m = h$ ,  $\sqrt{k/m} = \omega$ として、微分方程式

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5.11)$$

を考えよう。特性方程式は

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0 \quad (5.12)$$

となる。前節と同様に3つの場合に分けて考えよう。

1.  $h > \omega$ : これは抵抗力が大きい場合にあたり、特性方程式 (5.12) は二つの負の実数解

$$\lambda = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2} \quad (5.13)$$

をもつ。したがって、微分方程式 (5.11) の一般解は  $C_1, C_2$  を任意定数として、

$$x = C_1 e^{-(h - \sqrt{h^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{-(h + \sqrt{h^2 - \omega^2})t} \quad (5.14)$$

となる。この場合、物体は振動をしないで原点に吸いよせられる。これは**過減衰**と呼ばれる。

2.  $h < \omega$ : これは抵抗力が小さい場合にあたり、特性方程式 (5.12) は互いに共役な虚数解

$$\lambda = -h \pm i\omega' \quad (5.15)$$

をもつ。ここで、 $(\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2})$  とした。したがって、微分方程式 (5.11) の一般解は  $C_1, C_2$  を任意定数として、

$$x = e^{-ht} [C_1 \cos(\omega' t) + C_2 \sin(\omega' t)] \quad (5.16)$$

を得る。したがって、物体は抵抗がなかったときの固有角振動数 ( $\omega$ ) よりも少し小さい角振動数 ( $\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ ) で振動しつつその振幅を減衰させていく。

3.  $h = \omega$ : 微分方程式 (5.11) の一般解は  $C_1, C_2$  を任意定数として、

$$x(t) = e^{-ht} (C_2 t + C_1) \quad (5.17)$$

となる。この場合もやはり物体は振動しないで原点に吸いよせられる。これは**臨界減衰**と呼ばれる。

例えば、半径  $a$  で質量  $m$  のおもりが自然長  $l$  のバネにつるされ、教科書の図 5-3 のように液体の中に浸っているとすれば、おもりはストークスの法則により粘性抵抗をうける。このとき、運動方程式は

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l) - 6\pi a \eta \dot{x} \quad (5.18)$$

となる。ここで、 $k$  はバネ定数、 $\eta$  は粘性率である。

いま、 $r = 6\pi a \eta$  とし、 $(x - l - mg/k)$  を新たに  $x$  とおけば、前に出てきたのと同じ運動方程式

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \quad (5.19)$$

がえられる。

**[例題 5-3]** 運動方程式 (5.11) の初期条件を

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

とにおいて、三つの場合にわけて運動  $x(t)$  のグラフを描け。

**解答:** 位置と速度に初期条件を代入すれば任意定数がきまり、

1)

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{h^2 - \omega^2}} \left\{ (h + \sqrt{h^2 - \omega^2}) e^{-(h - \sqrt{h^2 - \omega^2})t} + (-h + \sqrt{h^2 - \omega^2}) e^{-(h + \sqrt{h^2 - \omega^2})t} \right\} \quad (5.20)$$

2)

$$x(t) = e^{-ht} \left\{ \cos(\sqrt{\omega^2 - h^2} t) + \frac{h}{\sqrt{\omega^2 - h^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - h^2} t) \right\} \quad (5.21)$$

3)

$$x(t) = e^{-ht} (ht + 1) \quad (5.22)$$

を得る。それらをグラフに描けば、教科書の図 5-4 のようになる。パラメーターは  $\omega = 1.0$  で、1)  $h = 0.5$ , 2)  $h = 1.5$ , 3)  $h = 1.0$  である。 $h$  の単位は  $s^{-1}$  である。

## 5.6 強制振動

### 5.6.1 数学的準備：2階線形非斉次微分方程式の一般解

この節では  $f(t)$  を与えられた関数、 $a, b, c$  をあたえられた定数としたときの、関数  $x(t)$  に関する微分方程式

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) \quad (5.23)$$

の一般解について考えよう。方程式 (5.1) とくらべると、右辺に  $x$  に比例しない項がくわわっている、これは2階線形非斉次微分方程式と呼ぶ。これと区別するときは、これまでの方程式 (5.1) を非斉次方程式 (5.23) にともなう斉次方程式ということがある。いま、斉次方程式 (5.1) の一般解は必ず二つの任意定数を含むからそれらを  $C, D$  として  $X(t, C, D)$  と書こう。非斉次方程式 (5.23) については、その特解（すなわちひとつの解） $y(t)$  がわかっているとす。このとき、

$$x(t, C, D) = X(t, C, D) + y(t) \quad (5.24)$$

を非斉次方程式 (5.23) に代入してみると、それを満たしていることがわかる。この解は二つの任意定数  $C, D$  を含んでいるから、二つの初期条件（たとえば、 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ ）にあわせて、 $C, D$  を決めることができる。すなわち、 $x(t, C, D)$  はもとめる非斉次方程式 (5.23) の一般解であり、 $C, D$  はその積分定数になっている。このように、非斉次方程式は、その特解をひとつだけ見つければ斉次方程式の一般解を使って非斉次方程式の一般解が表せることになる。

### 5.6.2 強制振動と共振

前節で述べた減衰振動をする力学系に外から振動する力  $f \cos(\Omega t)$  をかけてみる。例えば、これはお寺の鐘をつく動作を周期的に繰り返すこ

とに対応している。このようなものを**強制振動**という。運動方程式は

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f \cos(\Omega t) \quad (5.25)$$

である。便宜上、

$$\frac{r}{2m} = h \quad (5.26)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega \quad (5.27)$$

$$\frac{f}{m} = F \quad (5.28)$$

とおいてみれば非斉次方程式

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = F \cos(\Omega t) \quad (5.29)$$

を得る。

先に検討したように、これの一般解は付随する斉次方程式

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5.30)$$

の一般解  $X(t, C, D)$  にひとつの特解を加えたもので表される。その特解を  $y(t)$  とすると、一般解は

$$x(t, C, D) = X(t, C, D) + y(t) \quad (5.31)$$

とかける。

ところで、 $X(t, C, D)$  は減衰振動を表すので、いかなる初期条件のもとでも時間がたつにつれて、減衰していき、次第に  $x(t) = 0$  に近づいていく。だから、非斉次方程式のどの解も十分時間がたったあとでは、特解  $y(t)$  だけがのこることになる。

いま、非斉次方程式 (5.29) の特解として、

$$x = A \cos(\Omega t + \delta) \quad (5.32)$$

あるいは、

$$x = p \cos \Omega t - q \sin \Omega t \quad (5.33)$$

の形を仮定してみる。ここで、

$$p = A \cos \delta \quad (5.34)$$

$$q = A \sin \delta \quad (5.35)$$

の関係がある。式 (5.29) にこの解を代入すると

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x \\ &= \{(\omega^2 - \Omega^2)p - 2h\Omega q\} \cos \Omega t \\ &+ \{-2h\Omega p - (\omega^2 - \Omega^2)q\} \sin \Omega t \end{aligned} \quad (5.36)$$

これが  $F \cos(\Omega t)$  に等しいとおいて、 $p, q$  を求めるための連立方程式

$$(\omega^2 - \Omega^2)p - 2h\Omega q = F \quad (5.37)$$

$$-2h\Omega p - (\omega^2 - \Omega^2)q = 0 \quad (5.38)$$

を得る。これから、

$$p = A \cos \delta = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2} F$$

$$q = A \sin \delta = \frac{-2h\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2} F$$

が得られる。この結果から、 $A$  を正として  $A, \delta$  を求めると次式を得る。

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2}} F \quad (5.39)$$

$$\delta = \arctan \frac{2h\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (5.40)$$

**[例題 5-4]** いま、 $\Omega, h, F$  を固定して、 $\omega$  を変化させてみよう。このとき、 $(p, q)$  を平面上の点と考えると、それはどのような図形を描くだろうか。まず、

$$p^2 + \left(q + \frac{F}{4h\Omega}\right)^2 = \left(\frac{F}{4h\Omega}\right)^2 \quad (5.41)$$

が成り立つことをしめせ。 $\omega$  がどの値をとると、点  $(p, q)$  が原点から一番遠くなるだろうか？ つぎに、

$$A = \sqrt{p^2 + q^2} \quad (5.42)$$

であることを参考にして、振幅  $A$  がもっとも大きくなるのは  $\omega$  がどの値のときかこたえよ。

一定の強さの強制振動力を課すと固有振動数  $\omega$  が強制振動数  $\Omega$  に一致したとき最も大きな振幅で振動する。このふるまいをみるために  $\omega$  の関数として  $A/F$  のグラフを描いてみると、振幅は教

科書の図 5-5 に示されているように  $\omega = \Omega$  で極大値をもつことがわかる。この現象を**共鳴**または**共振**という。共鳴したときの  $A/F$  の値は

$$\frac{A}{F} = \frac{1}{2h\Omega} \quad (5.43)$$

である。ここで、 $h, \Omega$  の単位はともに  $s^{-1}$  である。

以上の議論は抵抗のないとき ( $r = 0$ ) または強制振動数が固有振動数に一致しているとき ( $\Omega = \omega$ ) でも  $r = 0$  かつ  $\Omega = \omega$  のときには、あてはまらないので、別に考えてみよう。このときには運動方程式が非斉次方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F \cos(\omega t) \quad (5.44)$$

に帰着する。特解が  $x(t) = \frac{Ft}{2\omega} \sin \omega t$  であることが確かめられるので、一般解は、

$$x(t) = B \cos \omega t + \left(C + \frac{Ft}{2\omega}\right) \sin \omega t \quad (5.45)$$

となる。この解は系にどのような初期条件をあたえても、時間がたつと振幅が限りなく大きくなって、何らかの破局に至ることを示している。

**例題 [5.9]** 重さのないバネの下端に質量  $m$  の質点をつるす。このバネの上端を  $x_0 = A \cos \Omega t$  に従って鉛直上下に振動させるとき、質点の位置座標  $x$  の時間的変化を求めよ。

**略解 [5.9]** バネの自然長を  $l_0$ 、バネの自然長からの伸びを  $x$  とすれば、質点の動く距離  $X$  は  $X = x + l_0 + x_0$  となる。運動方程式は

$$m\ddot{X} = mg - kx$$

となるから、新たに  $y = X - l_0 - mg/k$  を導入して方程式を書きかえれば、

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}A \cos \Omega t$$

となる。5章の4節の結果と比較することにより、 $\Omega \neq \omega$  のときは

$$X = l_0 + \frac{m}{k}g + B \sin(\omega t + \delta) + C \cos \Omega t$$

を得る。ただし、 $\omega^2 = k/m$ 、 $C = A\omega^2/(\omega^2 - \Omega^2)$  である。また、 $\Omega = \omega$  のときは次式を得る。

$$X = l_0 + \frac{m}{k}g + B \sin \omega t + \frac{\omega}{2}At \sin \omega t$$