

第5章 振 動

質点の運動のうちでも初歩的な問題である**単振動**を考える。さらにこの問題を発展させた**減衰振動**および**強制振動**を取り扱う。

5.1 復元力とフックの法則

バネに力を加えるとバネは伸びたり縮んだりするが、力をかけるのをやめれば直ちに自然の長さに戻る。このように歪みがもとにもどる性質は材料の**弾性**と呼ばれる。歪みが弾性の限界を越えると、もうもとの長さにもどらなくなる。この限界を**弾性限界**という。

変形があまり大きくない場合には、かけた力は次のように歪みに比例する。

$$\text{力} = k \times (\text{歪み}) \quad (5.1)$$

このような比例関係は弾性体に広く共通してあらわれるもので**フック** (Robert Hooke) の**法則**と呼ばれる。このときの比例定数 k は**バネ定数**といわれる。伸びの絶対値がある限界を越えるとこのような比例関係が成り立たなくなる。

5.2 単振動 (調和振動)

図??のようなバネの先端に質量 m の物体をつけてその運動を観察したとする。バネが自然の長さ (l) にあるときの物体の位置を原点としてバネにそって定めた物体の座標 x が弾性限界内であれば、物体に働くバネの力は

$$F(x) = -kx \quad (5.2)$$

と書かれる。

物体の質量が m であるから運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx \quad (5.3)$$

となる。その一般解は、次のどちらのかたちでも表せる。

1. A, δ を任意定数として

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad (5.4)$$

と書ける。

2. C_1, C_2 を任意定数として

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (5.5)$$

ここで、 ω は**角振動数**で、 $\omega = \sqrt{k/m}$ である。式 (5.4) の A は**振幅**、 δ は**初期位相**と呼ばれ、どちらも初期条件によりいろいろな値をとらせることができる。例えば初期条件が $t = 0$ で $x = x_0$ と $\dot{x} = v_0$ であるとすれば、 $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$ と $\cot \delta = -\omega x_0/v_0$ を得る。そのとき $x(t)$ は教科書の図 5-2 に示されるような時間変化を示し、物体は**周期運動**を行う。しかしながら、 ω は決して変えることができない量である。

この運動は最も単純で扱いやすい振動を表しているので、**単振動**または**調和振動**と呼ばれる。振動の**周期**を $T(\text{s})$ 、**振動数**を $\nu(\text{s}^{-1})$ とすると

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5.6)$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.7)$$

である。この ν を**固有振動数**という。

【例題 5-1】 自然の長さ l 、バネ定数 k のバネに質量 m の物体をつるし、つり合わせる。この物体を少しだけ持ち上げてから静かに放すと、つり合いの位置のまわりに上下の微小振動が生じる。その周期を求めよ。

解答： バネのつり下げられてあるところから下向きに質点の位置座標を x とすれば、運動方程式は

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l)$$

となる。つり合いの位置は、 $\ddot{x} = 0$ において $x = l + mg/k$ を得る。新たに平衡点からのずれを y であらわせば

$$m\ddot{y} = -ky$$

を得る。これから角振動数 ω は $\sqrt{k/m}$ となり、周期 T は $2\pi\sqrt{m/k}$ となる。

この例でわかるように平衡点を原点とする新たな座標を導入すると、運動方程式が線形となり、直ちに一般解を書き下すことができる。

このような単振動の現象は様々なところにあられる。例えば、系が力のつり合いで平衡状態にあるとき、この状態からの微小なずれによって単振動が引き起こされることがある。この種の振動は**平衡点付近の微小振動**と考え、後の章でより一般的に再考する。

5.3 単振動に関する練習問題

5.1 調和振動を表す一般解の形

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad (5.8)$$

または、

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (5.9)$$

で、任意定数 A, δ を C_1, C_2 で表せ。また、 C_1, C_2 を A, δ で表せ。

5.2 次の系の平衡点を考える。

- バネ定数 k のバネに質量 m の物体をつるしたときのつり合いの位置を求めよ。ただし、バネ自身の重さは無視する。
- あるバネに 50 g のおもりをさげたら、9.8 cm だけ伸びてつり合った。 $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ としてバネ定数を求めよ。
- 断面積 S 、長さ b で質量が M の棒を浮きとして垂直に立てて水に浮かべる。この浮きのつり合いの位置を求めよ。ただし、水の密度は ρ とする。

5.3 バネ定数 k_1 と k_2 の2本のバネを直列につなぎ、質量 m の物体をバネ定数 k_2 のバネの先につけた。片方を固定し、滑らかな平面の上においた。このときの角振動数 ω を求めよ。

5.4 弾性定数 k の二本のバネを次のように組み合わせ、質量 m の物体をおもりとしてつけると、バネ方向の微小振動の周期 T を求めよ。

- 2本のバネを並列につなぎ下におもりをつるす。
- 2本のバネを直列につなぎそのつなぎめにおもりをつけて水平でなめらかな板の上に乗せて両端を固定する。

5.5 2定点に糸を張りその中点に質量 m の物体を取りつける。糸に垂直な方向に物体が微小振動するときの周期を求めよ。糸の長さは $2a$ 、張力は S で変わらないとする。また重力は無視する。

5.6 断面積 S 、長さ b で質量が M の棒を浮きにして垂直に水に浮かべる。この浮きについて平衡点のまわりの上下振動の周期を求めよ。ただし、水の密度は ρ とする。

5.7 400 g の鳥かごがバネでつるされている。80 g の小鳥がそこに入ると、鳥かごは 1.25 cm 下がってつり合った。この鳥かごに小鳥が入ったまま上下に振動するときの周期 T を求めよ。

5.8 バネ定数 k のバネの左端を固定し右端に質量 M の物体Aをつけ、滑らかな水平面上に置く。このバネを a だけ縮めて質量 m の物体Bを物体Aの右におく。Aをはなすとバネが伸びて物体A、Bを加速する。あるところから二つの物体は離れて運動する。

- 二つの物体が動き始めてからそれらが離れるまでの時間 t_0 を求めよ。
- Bの等速直線運動の速さ v_0 を求めよ。

3. Aの行う単振動の振幅 C を求めよ。

5.3.1 演習問題の略解

5.1 略。

5.2 1. 自然長からの距離を x とする。重力とバネの力のつり合いの条件 $kx = mg$ から $x = mg/k$ を得る。

2. $k = mg/x = 5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$

3. 浮きの沈んだ長さを l とする。浮力と重力とのつり合いから $l = M/S\rho < b$ を得る。

5.3 それぞれのバネの自然長からのずれを x_1 と x_2 とすれば、質点は $x = x_1 + x_2$ だけ変位する。したがって、質点の運動方程式は $m\ddot{x} = -k_2x_2$ となる。また、バネの間の作用反作用の法則から $k_1x_1 = k_2x_2$ が成り立つ。

これらの式から $\omega = \sqrt{k_1k_2/m(k_1 + k_2)}$ を得る。

5.4 1. 自然長から質点の下がった距離を x とすれば、 $m\ddot{x} = mg - 2kx$ を得る。新たに $y = x - mg/2k$ とおけば $m\ddot{y} = -2ky$ を得る。これから $T = 2\pi\sqrt{m/2k}$ となる。

2. 自然長からのずれを x とする。

$m\ddot{x} = -2kx$ から $T = 2\pi\sqrt{m/2k}$ を得る。

5.5 糸に垂直方向のずれを x とする。運動方程式は $m\ddot{x} = -2Sx/\sqrt{a^2 + x^2}$ となる。 x/a は非常に小さいと近似して

$m\ddot{x} = -2Sx/a$ を得る。

これから $T = 2\pi\sqrt{ma/2S}$ を得る。

5.6 沈んでいる浮きの長さを x とする。運動方程式は $M\ddot{x} = Mg - \rho Sgx$ となる。これから $T = 2\pi\sqrt{M/\rho Sg}$ を得る。

5.7 かごの質量、鳥の質量を M, m とし、鳥かごの下がった距離を l とすれば、

$T = 2\pi\sqrt{l(M+m)/mg} = 0.55 \text{ s}$ となる。

5.8 1. 自然長からのずれを x とする。離れるまでの運動方程式は

$(M+m)\ddot{x} = -kx$ となる。初期条件 $x(0) = -a$ を入れて

$x(t) = -a \cos \omega t$ を得る。

ただし $\omega = \sqrt{k/(M+m)}$ である。物体Bが離れる条件は $x(t) = 0$ であるから、時間は $\pi\sqrt{(M+m)/4k}$ となる。

2. $v_B = a\sqrt{k/(M+m)}$

3. 初期条件のもとで振幅は

$C = a\sqrt{M/(M+m)}$ となる。