

## 第4章 荷電粒子の運動

**電磁気力**は万有引力と同様、自然界の基本的な力のひとつである。**電荷**をもった物体の**電場 (電界)**や**磁場 (磁界)**中での運動を考える。ここではローレンツ力をベクトル積であらわす。

### 4.1 電磁気力とクーロンの法則

電荷 (電気量) はクーロン (C) という単位で測られる。例えば電子のもつ電荷は  $(-e)$  と書かれ、陽子や  $\alpha$  粒子などのもつ電荷も  $e$  の整数倍である。したがって、 $e$  は**電気素量**と呼ばれ、その大きさは

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$$

である。

電荷をもつ粒子の間に働く力は、次の**クーロン (Charles Augustin Coulomb) の法則**によって与えられる。すなわち、電荷がそれぞれ  $q_1$  と  $q_2$  の二つの粒子を 1, 2 とすれば、1 が 2 に及ぼす力  $\mathbf{F}_{12}$  は

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (4.1)$$

である。ここで、 $\epsilon_0$  は真空中の**誘電率**で

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \quad (4.2)$$

である。この力を**クーロン力**と呼ぶ。

[例題 4-1] 1 が 2 に及ぼす力  $\mathbf{F}_{12}$  は 1 から 2 に向けてに引いた単位ベクトルを  $\mathbf{n}_{12}$  2 から 1 に向けてに引いた単位ベクトルを  $\mathbf{n}_{21}$  とするとき、

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \mathbf{n}_{12} \quad (4.3)$$

2 が 1 に及ぼす力  $\mathbf{F}_{21}$  は

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \mathbf{n}_{21} \quad (4.4)$$

とかけることをしめせ。

原点に電荷  $Q$  クーロンがあるとき、位置  $\mathbf{r}$  につくられる電場 (電界) を

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (4.5)$$

と定義しておく、そこに電荷  $q$  がおかれたときに受ける力は、

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

と書くことができる。

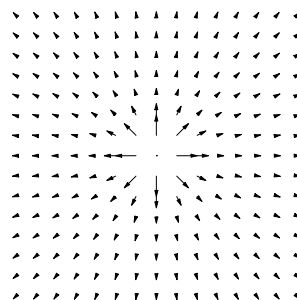


図 4.1: 原点に正の電荷  $Q$  がおかれたとき各点にできる電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

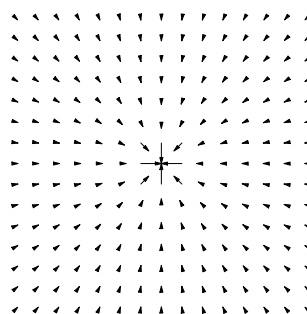


図 4.2: 原点に負の電荷  $Q < 0$  がおかれたとき各点にできる電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は空間の各点にベクトルを指定する。このような場合、ベクトル場が定義されているという。電場の単位は  $[\text{N} \cdot \text{C}^{-1}]$  である。

## 4.2 一様一定電場中の荷電粒子の運動

電場のみが荷電粒子に作用しているとき荷電粒子の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} \quad (4.7)$$

となる。電場が  $x$  軸方向を向き、一様で一定であるとする、 $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$  とかける。運動方程式の成分をとり、次の三つの方程式をえる。

$$m\ddot{x} = E_0 \quad (4.8)$$

$$m\ddot{y} = 0 \quad (4.9)$$

$$m\ddot{z} = 0 \quad (4.10)$$

$y, z$  軸方向は力を受けないの速度が一定である。また、 $x$  軸方向は負の方向に重力が働いているときと同じようにしてとける。いま初期条件として、 $t = 0$  で  $\mathbf{r} = (x_0, y_0, z_0)$  および  $\mathbf{v} = (V_x, V_y, V_z)$  とすると、

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_0 t^2 + V_x t + x_0 \quad (4.11)$$

$$y(t) = V_y t + y_0 \quad (4.12)$$

$$z(t) = V_z t + z_0 \quad (4.13)$$

と決定される。

## 4.3 ベクトル積 (外積)

二つのベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  とからベクトル積 (外積) を

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta)\mathbf{e} \quad (4.14)$$

と定義する。ここで、 $\theta$  は  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  とのなす角で、 $\mathbf{e}$  は図 2-6 に示すように  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  とがつくる面に垂直な単位ベクトルで、 $\mathbf{a}$  を  $\mathbf{b}$  へ回転させたとき右ネジの進む方向に向きをとるものとする。ベクトル積は積の順序が大切であり

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (4.15)$$

となる。

デカルト座標系の  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸方向の単位ベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  を基本単位ベクトルと呼んできたが、これらのとり方には右手系と左手系がある。右手系では、

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

がなりたつ。 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  をそのままにし、 $\mathbf{k}$  を反対方向にとった座標系を左手系と言う。

今後はいつも右手系を使うことにする。

[例題 4-1] ベクトル積  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  の成分を  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  の成分であらわせ。

解答：

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (4.18)$$

とする。ベクトル積には分配則が成り立つので、それを使用すると

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= (A_y B_z - B_y A_z) \mathbf{i} + (A_z B_x - B_z A_x) \mathbf{j} \\ &\quad + (A_x B_y - B_x A_y) \mathbf{k} \end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$C_x = A_y B_z - B_y A_z \quad (4.19)$$

$$C_y = A_z B_x - B_z A_x \quad (4.20)$$

$$C_z = A_x B_y - B_x A_y \quad (4.21)$$

また、3 行 3 列の行列式を使用すれば

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

となる。

[例題 4-2] スカラー 3 重積の公式

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (4.22)$$

を証明せよ。

[例題 4-4] スカラー 3 重積の公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (4.23)$$

を証明せよ。

## 4.4 ローレンツ力

電荷  $q$  の粒子が電場  $\mathbf{E}$  および磁束密度  $\mathbf{B}$  [ $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$ ] の中で運動しているとき、その粒子はローレンツ力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.24)$$

を受ける。すなわち、荷電粒子は電場から電場と平行な方向に、磁束密度からは速度ベクトルと磁束密度ベクトルがつくる面の垂直方向に力を受ける。その向きは  $q > 0$  のとき、 $\mathbf{v}$  から  $\mathbf{B}$  の方向に右ねじをまわすとその進む方向であり、その大きさは  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{B}$  の方向のなす角度を  $\theta$  とすると、 $q|\mathbf{v}||\mathbf{B}|\sin\theta$  である。

**[例題 4-3]** お互いに直交する一様で一定な電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  が作用している。いま、 $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$ ,  $\mathbf{B} = (B_0, 0, 0)$  であるとき、そのなかを電子が図 4-1 に示すように  $y$  軸方向に等速直線運動をしている。そのとき電子の速さ  $v$  を求めよ。

**解答：** 電子は  $y$  軸方向に等速直線運動をしているから、電子に作用しているローレンツ力はつり合っている。したがって、

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

が成り立つ。速度は  $\mathbf{v} = (0, v, 0)$  であるから

$$v = \frac{E_0}{B_0}$$

を得る。この結果が  $m$  にも  $q$  にも依存しないことに注意しよう。このことは  $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$  を適当に選ぶことにより電子の速さを選別することに応用できる。

## 4.5 一様一定磁場中の荷電粒子の運動

一様一定の磁束密度のみが作用しているとする。運動方程式は

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.25)$$

となる。 $B_0 > 0$  として  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$  となるように座標軸をとれば、

$$m\dot{v}_x = qv_y B_0 \quad (4.26)$$

$$m\dot{v}_y = -qv_x B_0 \quad (4.27)$$

$$m\dot{v}_z = 0 \quad (4.28)$$

となる。

初期条件として、 $t = 0$  で  $\mathbf{r} = (x_0, y_0, z_0)$  および  $\mathbf{v} = (V_x, V_y, V_z)$  としよう。  
z 方向には

$$v_z = V_z \quad (4.29)$$

$$z(t) = V_z t + z_0 \quad (4.30)$$

となるので  $x, y$  方向の運動面が一定の速さで変化するだけである。

$v_x$  については、 $\omega = qB_0/m$  として、運動方程式の 1 番目と 2 番目を両方使うと、

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \quad (4.31)$$

をえる。この一般解が

$$v_x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (4.32)$$

であることは第 3 章で学んだ。さらに運動方程式の第 1 番目を使うと、

$$v_y(t) = -A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (4.33)$$

を得る。ここで初期条件をつかって、

$$v_x(t) = V_x \cos \omega t + V_y \sin \omega t \quad (4.34)$$

$$v_y(t) = -V_x \sin \omega t + V_y \cos \omega t \quad (4.35)$$

さらに

$$x(t) = x_0 + \frac{V_x}{\omega} \sin \omega t + \frac{V_y}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad (4.36)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{V_x}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{V_y}{\omega} \sin \omega t \quad (4.37)$$

を得る。

ここで出てきた  $\omega = qB_0/m$  なる量は**サイクロトロン振動数**と呼ばれる。

**[例題 4-6]** 一様で一定な磁束密度中での荷電粒子の軌道を具体的にみてみよう。初期条件を  $V_x = v_0, V_y = 0$  として  $x(0) = 0, y(0) = 0$  としたとき式 (4.19) と式 (4.20) から軌道を求め図示せよ。

**解答：** 初期条件を両式に代入すると、

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad y(t) = -\frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

を得る。したがって、軌道は

$$x^2 + \left(y + \frac{v_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

となる。図 4-3 に  $q > 0$  の結果を示す。これは半径  $|mv_0/qB_0|$ 、角速度  $\omega$  の円運動を記述している。また、 $z$  軸の運動を考慮したときは**らせん運動**となる。

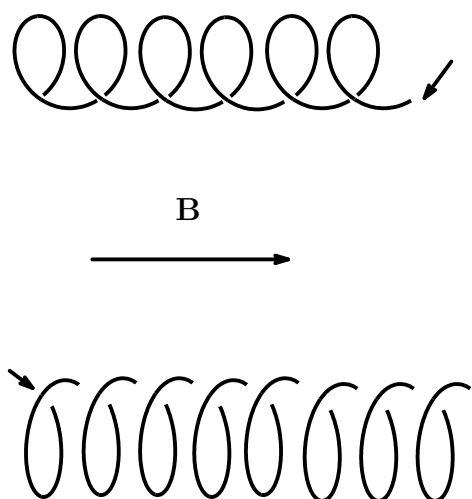


図 4.3: どちらも磁束密度  $\mathbf{B}$  のなかでの正電荷の軌道を表す。矢印は初速度。

[例題 4-7] 上式を書き直せば

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{V_y}{\omega} + \frac{V_x}{\omega} \sin \omega t - \frac{V_y}{\omega} \cos \omega t \\ y(t) &= y_0 - \frac{V_x}{\omega} + \frac{V_x}{\omega} \cos \omega t + \frac{V_y}{\omega} \sin \omega t \end{aligned}$$

を得ことから、 $x$   $y$  座標に関して、運動が等速円運動になることをしめし、その半径と中心の座標、速さ、および回転の向きをもとめよ。