

第3章 運動の法則と その応用 (その3)

3.9 極座標での運動方程式

3.9.1 極座標

平面内の運動を記述するために、2次元デカルト座標のほかに**極座標**がある。これは物体が原点を中心とする円周上を運動するときや、原点Oに力の中心があるときには大変便利である。平面上の点Pのデカルト座標 (x, y) と極座標の**動径** r および**偏角** θ は、

$$x = r \cos \theta \quad (3.1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (3.2)$$

の関係にある。ここで、偏角 θ は x 軸から左回りに測るものとする。(教科書の図 2.11 を参照)

また、 r, θ を使ったとき平面曲線は、一般に方程式

$$r = f(\theta) \quad (3.3)$$

によってあらわされる。平面上を物体が運動しているときには、動径と偏角が時間の関数になる。すなわち、

$$r = r(t) \quad (3.4)$$

$$\theta = \theta(t) \quad (3.5)$$

である。

3.9.2 非等速の円運動における速度と加速度

物体が原点を中心とする円運動をするときに、位置ベクトル $\mathbf{r}$ 、速度ベクトル $\mathbf{v}$ 、加速度ベクトル $\mathbf{a}$ をあらわす基本単位ベクトルとして動径方向の単位ベクトル $\mathbf{e} \equiv \mathbf{r}/r$ と、 $\mathbf{e}$ に垂直で偏角 θ の増える方向を向いた単位ベクトル $\mathbf{f}$ を使う。これら $\mathbf{e}$ と $\mathbf{f}$ はデカルト座標のときに用いた $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ で表すことができ、

$$\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos \theta(t) + \mathbf{j} \sin \theta(t) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{f} = -\mathbf{i} \sin \theta(t) + \mathbf{j} \cos \theta(t) \quad (3.7)$$

によって表される。これでわかるように、デカルト座標の基本単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ は時間的に変化しなかったが、単位ベクトル $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ の向きは、 $\theta(t)$ をつうじて物体の運動につれて変化する。したがってそれらの時間微分を計算してみると、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{i} \frac{d}{dt} \cos \theta(t) + \mathbf{j} \frac{d}{dt} \sin \theta(t) \\ &= \dot{\theta} (-\mathbf{i} \sin \theta(t) + \mathbf{j} \cos \theta(t)) \\ &= \dot{\theta} \mathbf{f} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= -\mathbf{i} \frac{d}{dt} \sin \theta(t) + \mathbf{j} \frac{d}{dt} \cos \theta(t) \\ &= \dot{\theta} (-\mathbf{i} \cos \theta(t) - \mathbf{j} \sin \theta(t)) \\ &= -\dot{\theta} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.9)$$

さらに

$$\ddot{\mathbf{e}} = -\dot{\theta}^2 \mathbf{e} + \ddot{\theta} \mathbf{f} \quad (3.10)$$

$$\ddot{\mathbf{f}} = -\ddot{\theta} \mathbf{e} - \dot{\theta}^2 \mathbf{f} \quad (3.11)$$

とまとめることができる。

そこでまず、円運動の半径を a として、位置ベクトル $\mathbf{r} = a\mathbf{e}$ を順次両辺を時間で微分して、

速度と加速度を計算してみよう。

$$\mathbf{r} = ae \quad (3.12)$$

$$\mathbf{v} = a\dot{\theta}\mathbf{f} \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = -a\dot{\theta}^2\mathbf{e} + a\ddot{\theta}\mathbf{f} \quad (3.14)$$

を得る。 $\dot{\theta}$ を**角速度**、 $\ddot{\theta}$ を**角加速度**と呼ぶ。

物体にはたらく力 $\mathbf{F}$ も $\mathbf{e}$ 、 $\mathbf{f}$ の方向に分解でき、

$$\mathbf{F} = F_r\mathbf{e} + F_\theta\mathbf{f} \quad (3.15)$$

とかけるから、ニュートンの第2法則 $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$ の法線方向と接線方向の成分はそれぞれ、

$$F_r = -ma\dot{\theta}^2 \quad (3.16)$$

$$F_\theta = ma\ddot{\theta} \quad (3.17)$$

[例題 3-12] 鉛直面内にたてられた粗い円周の内側におかれた物体が静止摩擦によって静止する範囲をもとめよ。静止摩擦係数を μ とする。〔答。最下点からの角度を θ とすると $-\mu < \tan \theta < \mu$ 。下図左参照。〕

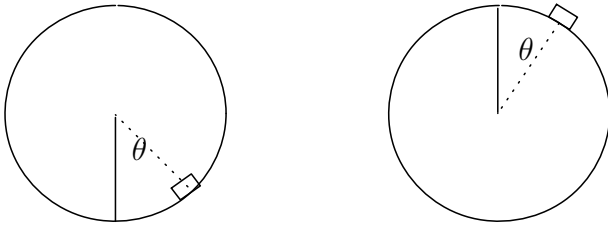


図 3.1: 摩擦のある円周の内側または外側におかれた物体のつりあい

[例題 3-13] 鉛直面内にたてられた粗い円周の外側にのせられた物体が静止摩擦によって静止する範囲をもとめよ。静止摩擦係数を μ とする。〔答。最高点からの角度を θ とすると $-\mu < \tan \theta < \mu$ 。上図右参照。〕

簡単な円運動の例として、鉛直面内にたてられた半径 a の滑らかな円周上に拘束された質量

m の物体の運動方程式を、下向きに重力の加速度 g が働いている場合について、動径方向と接線方向にわけて、書いてみよう。円周が物体に及ぼす垂直抗力は一般に内向きか外向きかの、どちらにもなりうる。それを内向きを正として N と記すことにする。また、 $\theta = 0$ を鉛直下方にとると、

$$ma\ddot{\theta} = -mag \sin \theta \quad (3.18)$$

$$-ma\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta \quad (3.19)$$

これでわかるように、円周上に拘束された物体の運動方程式はその片方が運動を決める微分方程式になっていて、もう一方が拘束力を決める方程式になっている。紐や糸で物体を引っ張って拘束するときには、拘束力 N は負になることができない。そのようなときは物体は拘束されず、半径 a の円の内部を自由に運動することになる。

3.9.3 単振子の微少振動

ここで、長さ ℓ の紐の先に質量 m の質点がつけられ、同一平面内で平衡点の付近を振動する**単振(り)子**の運動を議論する。振動のふれは小さいとし仮定して「周期の2乗は振り子の長さに比例し、振り子の質量に依存しない」ということを運動方程式から示してみよう。運動は一鉛直平面内で起こっているとする。図のように座標をとり張力 T と重力 mg を考慮すれば、運動方程式は

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

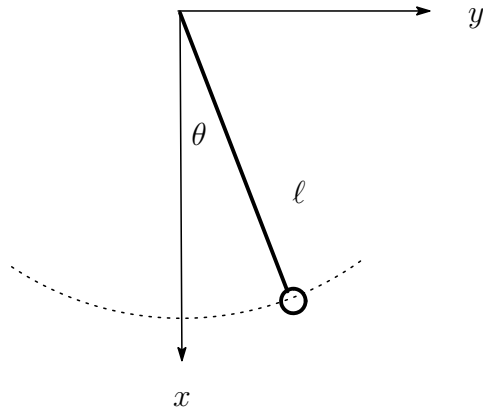


図 3.2: 単振子の微小振動

これから $\sqrt{\frac{g}{l}} = \omega$ と記すことにすると、 $\theta(t)$ を決定するのに次の方程式を解けばよい。

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$$

θ が微小なので関数 $\sin \theta$ をテイラー展開して、

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

右辺の第 1 項だけを使うと次の式を得る。

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{g}{l} \theta$$

こうして、2 階の微分方程式

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \quad (3.20)$$

があらわれた。これはこれまでの変数分離法では解けない方程式である。振動の一般の問題は第 5 章で本格的にあつかうが、ここではこの方程式の一般解を 2 つのやり方で求めてみよう。

二回微分してするともとの関数の $-\omega^2$ 倍になる関数なら、われわれには 2 つの異なった関数が思い当たる。 $\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ である。それらの和も差も同じ性質を持っている。一般に A, B を定数として、 $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ も解になっていることがわかるが、この式は二つの定数を含ん

でいる。2 階の微分方程式の理論によれば二つの定数を含む解が見つければそれは一般解である。そこで、次の一般解を得ることができた。

$$\theta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.21)$$

[例題 3-6] 初期条件 $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(t) = \omega_0$ から任意定数 A, B を決めてみよう。

[解答]

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t + \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t \quad (3.22)$$

微分方程式 (3.20) には次のような別の解き方もある。解こうとする微分方程式の両辺に $\dot{\theta}$ をかけて変形してみよう。

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \dot{\theta} \quad (3.23)$$

$$\frac{t}{dt} \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\omega^2 \frac{t}{dt} \frac{1}{2} \theta^2 \quad (3.24)$$

そこで

$$\frac{t}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega^2 \frac{1}{2} \theta^2 \right) = 0 \quad (3.25)$$

これは (...) の中の量が時間的に一定の正の量であることを示している。それを $\frac{1}{2} \omega^2 C_1^2$ とおくと

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega^2 \frac{1}{2} \theta^2 = \frac{1}{2} \omega^2 C_1^2 \quad (3.26)$$

がえられる。これは $\theta(t)$ の 1 階の微分方程式になっており、しかも変数分離法でとける。すなわち、

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \omega \sqrt{C_1^2 - \theta^2} \quad (3.27)$$

今、上の符号だけを考えることにして、

$$\frac{\theta}{C_1} = \alpha \quad (3.28)$$

さらに、

$$\alpha = \cos \beta \quad (3.29)$$

と変数変換すると、 $\beta(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d\beta}{dt} = -\omega \quad (3.30)$$

をえる。この方程式の一般解が $\beta(t) = -\omega t + C_2$ であることから、

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega t - C_2) \quad (3.31)$$

が得られる。

[例題 3-15] 初期条件 $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \omega_0$ から任意定数 C_1, C_2 を決めると、前の方法で得られた特解

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t + \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t \quad (3.32)$$

に一致することを確認しよう。

いずれの方法でも、振り子の微小振動の周期 T は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (3.33)$$

となる。したがって、周期の2乗は紐の長さに比例し、質量に依存しない。どんな初期条件を与えても振動の周期は変わらない（等時性）。

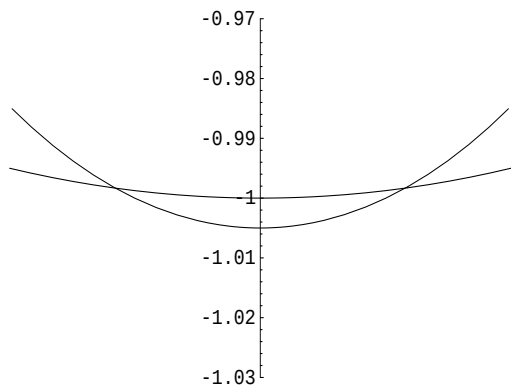


図 3.3: 微小振動する単振り子の糸の張力。振り子の運動する円弧 ($y = -1$ を通る曲線) と張力の大きさを重ねて描いたもの。曲線が交わる点で、 $T = mg$ となる。

[例題 3-16] 単振り子が $t = 0$ で $\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0$ の初期条件で微小振動するとき、

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad (3.34)$$

がなりたつ。このとき、糸の張力 T は振り子がつりさげられて静止しているときの値 mg とくらべて、どのような値をとるか、 m, g, θ_0 および振り子の角度 θ とであらわせ。ここで、微小な x に対する近似式 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2$ を使うこと。糸が一番切れやすいのはどこか。張力の最小値はいくつか。

[答え] $T = mg(1 + \theta_0^2 - \frac{3}{2}\theta^2)$

[例題 3-17] 単振り子が微小振動

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad (3.35)$$

をしているとする。 $\theta = 0$ のときと $\theta = \theta_0$ のときに、加速度の r -方向と θ -方向の成分がそれぞれどのような値をとるか。

[答え]

$$\alpha_r = -\ell \omega^2 \theta_0^2 \sin^2 \omega t \quad (3.36)$$

$$\alpha_\theta = -\ell \omega^2 \theta_0 \cos \omega t \quad (3.37)$$

なので、

$$\begin{cases} \alpha = -\ell \omega^2 \theta_0^2 e & (\theta = 0 \text{ のとき}) \\ \alpha = -\ell \omega^2 \theta_0 f & (\theta = \theta_0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3.38)$$

3.9.4 極座標における一般の運動方程式

物体にはたらく力 $\mathbf{F}$ はどの瞬間でも物体の位置によってきまる e, f の方向に分解でき、

$$\mathbf{F} = F_r e + F_\theta f \quad (3.39)$$

とかけるから、ニュートンの第2法則 $\mathbf{F} = m\alpha$ の e, f の方向成分に分解した、

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (3.40)$$

$$F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (3.41)$$

が極座標における運動方程式になる。