

第3章 運動の法則と その応用 (その2)

3.7 空気の抵抗を受けながら運動する物体

重力のもとでは投げられた物体が放物線を描いて運動することをすでに学んだが、空気の抵抗を考慮するときこの結果がどのように変わるかを調べよう。ここでは、空気の抵抗力は速度ベクトルに比例して、 $-k\mathbf{v}$ と表されると仮定しよう。このときの運動方程式を解くのは、実際に微分方程式を解かなければならない最初の例になる。

3.7.1 落下運動のとき

まず物体が鉛直線上を落下する場合について考える。空気の抵抗を受けながら鉛直線上を落下する質点の運動について考える。空から降ってくる雨粒は一定の速度以上には加速しないように見える。これは空気と雨粒の間の摩擦による。

鉛直方向に上向きに z 軸をとる。作用する力は重力と抵抗力であるから、運動方程式は

$$m\ddot{z} = -mg - k\dot{z}$$

となる。ここで $k > 0$ である。

この運動方程式は2階の微分方程式であるが、 $\dot{z} = v$ とおけば、1階の微分方程式を2度解くことによって、運動が求まる。すなわちまず落下速度 v に注目すれば

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\left(v + \frac{m}{k}g\right)$$

を得る。この方程式は変数分離が可能で、初期条件 $v(0) = 0$ を満たす解は次式で与えられる。

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)$$

特に、 $v(\infty) = -mg/k$ となる。この値 mg/k は**終端速度**と呼ばれる。これが雨粒の降ってくる速度になる。落下距離は別の1階微分方程式

$$\frac{dz}{dt} = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)$$

と解いて、初期条件 $z(0) = 0$ を使用すると、

$$z(t) = -\left(\frac{m}{k}\right)gt + \left(\frac{m}{k}\right)^2g\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

となる。

3.7.2 平面運動になるとき

物体を投射する鉛直面内に、 xy -座標をとり重力の加速度ベクトルを $\mathbf{g} = (0, -g)$ とすると、運動方程式はベクトルを使って、

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - k\mathbf{v} \quad (3.1)$$

となる。それぞれの成分についての方程式は

$$m\dot{v}_x = -kv_x \quad (3.2)$$

$$m\dot{v}_y = -kv_y - mg \quad (3.3)$$

となる。初期条件 $(v_x(0), v_y(0)) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ を使うと、

$$v_x = v_0 \cos \theta e^{-kt/m} \quad (3.4)$$

$$v_y = \left(v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m} - \frac{mg}{k} \quad (3.5)$$

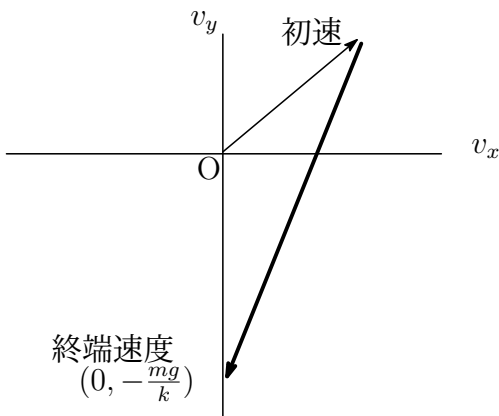
が得られる。

ここまでで問題の半分か解けたことになる。

[例題 3-4] 上で求めた速度ベクトル $\mathbf{v} = (v_x(t), v_y(t))$ の先端の点 (v_x, v_y) が描く軌跡 (ホドグラフ) を描け。

解答: そのためには、 v_x, v_y から、 t を消去して、 v_x, v_y だけの関係を求めて、グラフにすればよい。 $(e^{-kt}$ を消去しても同じことである。) 答えは、初速 $(v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ と終端速度 $(v_x, v_y) = (0, -\frac{g}{k})$ を結ぶ線分になる。どんな初速で投げても k だけからきまる終端速度に達する。ホドグラフを直線の式で表せば、次の1次式になる。

$$v_y = \frac{v_0 \sin \theta + mg/k}{v_0 \cos \theta} v_x - \frac{mg}{k} \quad (3.6)$$



つぎに方程式

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \theta e^{-kt/m}$$

$$\frac{dy}{dt} = (v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k}) e^{-kt/m} - \frac{mg}{k}$$

を初期条件 $x(0), y(0) = (0, 0)$ のもとで解くと、

$$x = \frac{mv_0}{k} \cos \theta (1 - e^{-kt/m})$$

$$y = \frac{m}{k} (v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k}) (1 - e^{-kt/m}) - \frac{mgt}{k}$$

となる。

[例題 3-5] $k \rightarrow 0$ の極限で前にもとめた抵抗のない場合の放物運動と一致することを確認めよ。

解答: それには x, y の $k \rightarrow 0$ の極限を知らなければならぬ。指数関数の Taylor 展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \quad (3.7)$$

と使うと、

$$1 - e^{-kt/m} = kt/m - \frac{k^2 t^2}{2m^2} + \mathcal{O}(k^3 t^3/m^3)$$

となる。したがって、

$$\lim_{k \rightarrow 0} x = v_0 t \cos \theta \quad (3.8)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.9)$$

このときの軌道は前にもとめた放物線運動の式と一致する。

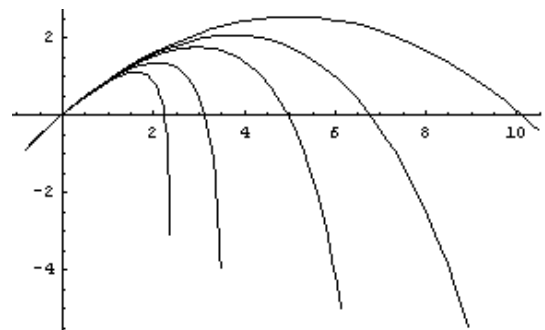
抵抗力の効果を見るために例として

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad (3.10)$$

$$v_0 = 10 \text{ m/s} \quad (3.11)$$

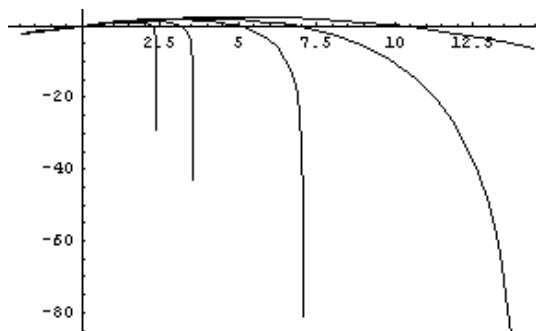
$$\theta = \pi/4 \quad (3.12)$$

の場合に $k = 0, 0.5, 1, 2, 3$ [kg/s] と変化させてみて、軌道を描くと下図のようになる。



$k = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ の場合の物体の軌道

物体の軌跡を10秒まで描いて、様子を見てみよう。



物体の軌跡を $0 \leq t \leq 10$ 秒まで見た図。

$k = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ の場合

抵抗のないときと異なり、物体は最終的には垂直に落下するにいたる。このように $x(t)$ の値には上限があり、そこで事実上落下運動になってしまう。

[例題 3-6] このときの、 x 座標の極限值 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ をもとめよ。

$$(\text{答}) \quad x(\infty) = \frac{mv_0}{k} \cos \theta$$

[例題 3-7] 物体が一番高く上がる時の位置と時刻を求めよ。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} t = \frac{m}{k} \ln(1 + \frac{kv_0}{mg} \sin \theta) \\ x = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g(1 + \frac{kv_0}{mg} \sin \theta)} \\ y = \frac{mv_0}{k} \sin \theta - \frac{m^2 g}{k^2} \ln(1 + \frac{kv_0}{mg} \sin \theta) \end{cases}$$

[例題 3-8] この結果についても、 $\lim_{k \rightarrow 0}$ を求めて、空気抵抗のないときの答えに一致することを確認してみよう。ただし、 $\ln(1+\epsilon) = \epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ を使え。

3.8 拘束と摩擦

物体の位置が与えられた曲面の上に限定されているとき、物体の運動は**拘束** (束縛) されている。

という。このときその自由度は3から2に減少する。この曲面が物体に及ぼす力を**拘束力** (束縛力) と呼ぶ。この場合、曲面は物体からの反作用を受けるはずであるが、曲面はそれによって動いたり変形したりしないものと仮定しよう。一般に拘束力は、最初からわかっているものではなく、問題を解くなかで定まるものである。

拘束力のベクトル $\mathbf{F}_c$ を曲面の接平面方向の成分とそれに垂直な (法線方向の) 成分とに分けよう。拘束力の法線方向成分を**垂直抗力** $\mathbf{N}$ 、それに垂直な成分を**摩擦力** $\mathbf{F}_f$ と呼ぶ。教科書の図 3-6 に示されるように

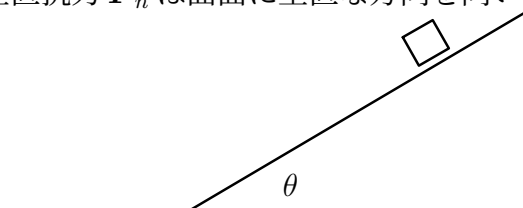
$$\mathbf{F}_c = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f \quad (3.13)$$

である。垂直抗力は物体をこの曲面から離さないようにする力である。一方、摩擦力は物体が曲面上を運動するのを妨げるように働く。

3.8.1 滑らかな拘束

摩擦力が作用していないとき拘束は滑らかであるという。このとき、拘束力は垂直抗力と一致するので単に**抗力**と呼ぶこともある。摩擦のない面を**滑らかな面**といい、一方、摩擦がある面を**粗い面**という。

曲面が $f(x, y, z) = 0$ で与えられているとき、垂直抗力 $\mathbf{F}_n$ は曲面に垂直な方向を向いている。



[例題 3-10] 地面と傾斜角 θ の斜面上を質量 m の質点が初速度なしで運動する。質点の大きさおよび斜面との摩擦は無視できるとする。斜面

に沿って、下向きまたは上向きに x 座標をとって、質点の運動方程式を求め、その運動方程式から x 方向の加速度を g, θ であらわせ。初期条件を $x(0) = 0, v(0) = 0$ とするときに、座標 $x(t)$ をもとめよ。またこのときの斜面と物体との間の垂直抗力 N はいくらか。

〔答〕下向きに x 座標をとれば、運動方程式は、 $m\ddot{x} = mg \sin \theta$ である。これから、加速度は、 $\alpha = g \sin \theta$ となる。運動は斜面に沿った落下運動

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 g \sin \theta \quad (3.14)$$

とあらわされる。斜面からうける垂直抗力は、斜面の法線方向の力の釣り合いから、つねに $N = mg \cos \theta$

3.8.2 摩擦に関する経験則

摩擦には、物体が静止しているときに働く**静止摩擦**と動き出してから働く**動摩擦 (滑り摩擦)**とがある。静止摩擦力には一般に限界がある。垂直抗力の大きさが N であるとき静止摩擦力の大きさ F_f は

$$F_f \leq \mu N \quad (3.15)$$

の範囲にある。ここで、 μ は質点と曲面を作っている物質の性質によってきまる比例定数で**静止摩擦係数**といわれる。

動摩擦の大きさを F_f とすれば、

$$F_f = \mu' N \quad (3.16)$$

の関係が成り立つ。ここで、 μ' は**動摩擦係数**と呼ばれる比例定数で物質の性質からきまる。

クーロン (Charles-Augustin Coulomb) は摩擦に関する次のような経験則を発見した。

1) 静止摩擦も動摩擦も接触面積の大小には依存せず、接触しあっている物体および面を構成する物質の種類と垂直抗力の大きさのみによってきまる。

2) 動摩擦は滑り速度には依存しない。

3) 静止摩擦は動摩擦よりも大きい。

〔例題 3-9〕 水平で粗い面での摩擦を考える。

1) 水平で粗い面上に置かれた質量 m の物体が動き出すのに必要な水平力を求めよ。

2) 水平で粗い面上を初速 V で滑り始めた物体が止まるまでに進む距離を求めよ。

解答： 1) $F > \mu mg$ のとき動き出す。

2) 物体のすべる方向を正として、運動方程式は $m\dot{v} = -\mu' mg$ となる。これを初期条件 $v(0) = V, x(0) = 0$ のもとで解けば、

$$v(t) = -\mu' gt + V$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}\mu' gt^2 + Vt$$

がえられる。静止する時刻は、 $t = V/(\mu' g)$ であるから、これらの式は $0 < t < V/(\mu' g)$ の間でのみなりたつ。すなわち、この時刻をこえると静止する。そのときまでに走る距離は $x(V/(\mu' g)) = \frac{V^2}{2\mu' g}$ である。

3.8.3 摩擦のある斜面上の運動

〔例題 3-11〕 傾斜角 θ 斜面上に質量 m の物体が乗っており、物体と斜面との静止摩擦係数と動摩擦係数をそれぞれ μ, μ' とし、次の問に答えよ。斜面に沿って、下向きまたは上向きに x 座標をとるものとする。

1. θ を 0 から徐々に増やしていくとき、静止していた物体が滑り出す角度を μ をつかってあらわせ。

2. いま、 $\tan \theta > \mu$ であるとする。斜面にそって、上向きに衝撃によって初速 V をあたえるとき、物体は斜面にそって、どれだけの距離をのぼるか。 V, g, θ, μ' であらわせ。
3. 前問につづいて、物体が折り返して滑降し始め、出発点を通過するときの速度を V, θ, μ' であらわせ。

[答]

1. $\tan \theta = \mu$ となる。この角度は摩擦角とよばれる。
2. 上向きに x 座標をとると、上昇しているときの摩擦力が負になるので、運動方程式は

$$m\alpha = -mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta \quad (3.17)$$

これから、 $\alpha = -g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)$ である。したがって、

$$\begin{aligned} v(t) &= -tg(\sin \theta + \mu' \cos \theta) + V \\ x(t) &= -\frac{1}{2}t^2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta) + tV \end{aligned}$$

上りつめる時刻は $t = \frac{V}{g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$ であり、そのとき $x = \frac{V^2}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$ となる。これを次の問題のために L としよう。

3. 下降し始めるときをあらためて、 $t = 0$ とすると、運動方程式は、

$$m\alpha = -mg \sin \theta + \mu' mg \cos \theta \quad (3.18)$$

これから、 $\alpha = -g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$ である。これより、

$$\begin{aligned} v(t) &= -gt(\sin \theta - \mu' \cos \theta) \\ x(t) &= L - \frac{1}{2}t^2g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) \end{aligned}$$

$x(t) = 0$ から t をもとめると、

$$t = \frac{V}{g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)(\sin \theta + \mu' \cos \theta)}$$

これを $v(t)$ に代入すると、出発点を通過するときの速度

$$v = -V \sqrt{\frac{\sin \theta - \mu' \cos \theta}{\sin \theta + \mu' \cos \theta}} \quad (3.19)$$

がえらる。これは初速より遅くなっている。打ち上げてから滑り降りるまでの速度の変化をグラフに示すと下図のようになる。

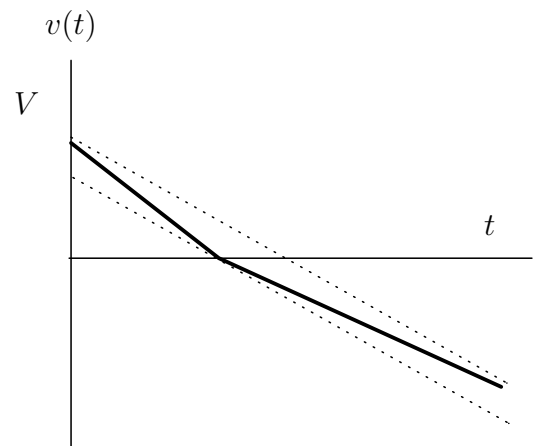


図 3.1: 摩擦のある斜面に沿って打ち上げられた物体の速度の時間変化。点線は動摩擦がないときの速度の変化。