

第3章 運動の法則とその応用

ニュートンの**運動の法則**を正確に述べ、それを解くことの意味を考える。つづいて具体的な問題を解いてみる。

3.1 運動の第1法則 (慣性の法則)

質量だけがあって大きさのない物体を考え、それを**質点**と呼ぶことにする。物体が十分に小さいならば、それを質点として扱うことができる。大きさのある物体はそれを小さな部分に分け、その各々を質点と考えればよい。

運動の第1法則は、**質点に力が働かないときには、その速度が時間的に一定に保たれること**をあらわしている。この法則はガリレイの**慣性の法則**とも呼ばれる。

ある質点の位置と速度をそれぞれ $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ とし、この質点に力が働かないときこの法則は

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{V} = \text{一定} \quad (3.1)$$

とあらわされる。これを積分して

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{V}t + \mathbf{r}(0) \quad (3.2)$$

を得るので、力を受けない質点は**等速直線運動**をする。また、 $\mathbf{V} = 0$ のときは**静止**したままである。

この法則が成立する座標系を**慣性系**または**慣性座標系**という。質点の運動を記述するには、適当な慣性系を設定する必要がある。

3.2 運動の第2法則 (運動の法則)

運動の第2法則は、力が質点に作用した場合について述べており、**質点に働く力は質点の質量と加速度との積に比例し、そのときの比例定数は普遍定数であるとあらわされる。**

質点の質量を m , 質点の**加速度**を α , さらに質点に働く力を F とすると

$$F = km\alpha \quad (3.3)$$

が成り立つ。ここに、 k はどんな場合でも常に同じ値をとる。式(3.3)を質点の**運動方程式**という。

質量は kg の単位ではかるとして、この法則が最も簡単な形をとるように力の単位を定めよう。すなわち、 $k = 1$ にとれば、運動の第2法則は

$$F = m\alpha \quad (3.4)$$

となる。このときの力の単位を N(ニュートン) とすると

$$\text{N} = \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \quad (3.5)$$

となる。このように最も基本的な法則が簡単な形をとるように組み立てていく単位系を**絶対単位系**という。

一般に、力は位置ベクトル、速度、時間などに依存している。力が位置ベクトルのみの関数であるときその力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ を**力の場**という。また、複数の力が質点に作用しているときはそれらの和が $\mathbf{F}$ である。

3.3 運動の第3法則 (作用反作用の法則)

二つの質点の間に働く力を考えよう。質点1と質点2とがあって、1が2に及ぼす力が $\mathbf{F}_{12}$ であるとき、2も必ず1に力 $\mathbf{F}_{21}$ を及ぼし、その関係は

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (3.6)$$

で与えられる。さらに、これらの力は図??に示すようにベクトル $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ に平行である。

このように二つの質点間に作用する力は対になってあらわれ、一方を**作用**、他方を**反作用**と呼ぶことがあるため、この法則は**作用反作用の法則**という。8章でみるように系が複数の質点からなっているときこの法則は効力を発揮する。

3.4 重さと万有引力

地球上の物体はすべて地球の中心に向かって引かれている。この力が**重さ (重量)**の力、すなわち**重力**である。そのため物体は放されると落下するが、空気の抵抗を無視しうる場合には、すべての物体の落下する加速度 (**重力加速度**) は地表ではどこでもほぼ同じ値

$$g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (3.7)$$

をとる。そうすると質量 m の物体が地表に向かって引かれる力は mg でなければならない。この重力がどこからくるのかという問の答えはニュートンの**万有引力の法則**によって明らかにされた。

質量がそれぞれ m_1 と m_2 の二つの物体をそれぞれ1, 2とする。物体の1, 2の位置ベクトル

を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とすれば、それらの間には

$$G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \quad (3.8)$$

だけの大きさの引力が働く[†]。ベクトルを使うと1が2に及ぼす力 $\mathbf{F}_{12}$ は

$$\mathbf{F}_{12} = G m_1 m_2 \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (3.9)$$

となる。ここで G は**重力定数 (万有引力定数)**と呼ばれ、普遍的な値である。1798年にカヴェンディッシュ(Henry Cavendish)が地上の実験室で測定したもので、その値は

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \quad (3.10)$$

である。このことから地球を一様な密度の完全球とみなして、その半径と質量を r, M とすると

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad (3.11)$$

であることがわかる。

[例題 3-1]

実際に数値

$$M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg} \quad (3.12)$$

$$r = 6,370 \text{ km} \quad (3.13)$$

を代入して地上における重力の加速度 g を計算してみよう。

解答： 略。

3.5 運動方程式からわかること

力学系を記述する独立な座標の数をその系の**自由度**という。質点の自由度は1粒子あたり3

[†]運動方程式にあらわれる質量を**慣性質量**と呼び、万有引力にあらわれる質量を**重力質量**と呼ぶ。これらが同じ値をもつことをエートヴェシュ(Rolánd von Eötvös)は1896年に実験的に検証した。

3.5. 運動方程式からわかること

である。しかし、粒子の運動が拘束されている場合はこの自由度は減る。

ベクトルで書かれた一つの質点の運動方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (3.14)$$

は三つの方程式

$$m\ddot{x} = F_x \quad (3.15)$$

$$m\ddot{y} = F_y \quad (3.16)$$

$$m\ddot{z} = F_z \quad (3.17)$$

と同等である。この場合、求めるべきものは未知関数 $x(t), y(t), z(t)$ である。これらの未知関数の数が系の自由度に対応している。

これらの方程式は、時間の関数 x, y, z の 2 階導関数を含む関係式からもとの関数 x, y, z を求めるための方程式であるから 2 階の微分方程式になる。一般に微分方程式から未知関数を完全にきめることはできない。2 階の微分方程式の一般解は、一つの自由度について 2 個の任意定数を含むから、全体で 6 個の任意定数を含むことになる。任意定数をきめるひとつの方法は、ある時刻における初期条件を与えることである。

このことを地面に向かって鉛直線上を落下する物体の運動 (**自由落下**) を例にみる。この運動は鉛直線上に拘束されているので自由度は 1 である。図?? のように鉛直線上の上向きに z 座標をとれば、質量 m の質点の運動方程式は

$$m\ddot{z} = -mg \quad (3.18)$$

となる。すなわち

$$\ddot{z} = -g \quad (3.19)$$

となり、これを満たす z は C_1 と C_2 を定数として

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (3.20)$$

以外にはありえない。

この一般解に含まれる任意定数 C_1 と C_2 は次のように、初期条件を課すことによって決定される。いま、 $t = 0$ で $z = z_0, \dot{z} = v_0$ であるとする。このことから $C_2 = z_0, C_1 = v_0$ となり、

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0 \quad (3.21)$$

と運動が決定される。

一般に、自由度が f である力学系の運動方程式は f 個の 2 階微分方程式の組になり、その一般解は $2f$ 個の任意定数を含む。それらの定数をすべてきめて、運動を求めるためには、 $2f$ 個の初期条件を必要とする。これらの初期条件はある時刻での f 個の座標の値と f 個の速度の値によって与えられるので、力学においては、初期条件さえ与えられれば、その後の物体の運動が決定される。

[例題 3-2] 質量 m の質点を沿直面 (x - z 平面) 内で、図?? のように初速 V 、仰角 θ で点 $P(x_0, z_0)$ から投げたとき、その質点の軌道を求めよ。

解答： 質点に作用する力は $\mathbf{F} = (0, -mg)$ である。したがって、質点の運動方程式は

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg$$

となる。時間に関して 2 回積分すれば、それぞれの微分方程式は解ける。初期条件を代入すると

$$\begin{aligned} x(t) &= tV \cos \theta + x_0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}t^2g + tV \sin \theta + z_0 \end{aligned}$$

を得る。これらの式から時間を消去すれば、質点の軌道は

$$z(x) = -\frac{g}{2(V \cos \theta)^2}(x - x_0)^2 + \tan \theta (x - x_0) + z_0$$

となり、質点は放物線を描く。

3.6 1階微分方程式の解法: 数学的な準備

x を変数 t の関数とする。関係式

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0 \quad (3.22)$$

は n 階の**微分方程式**と呼ばれる。微分方程式を解くということは、これを満たす関数 $x(t)$ をすべて求めることである。ある一つの関数 x が式 (2.41) の微分方程式を満たすならば、それは**特解**と呼ばれる。微分方程式の最も一般的な解を**一般解**と呼ぶが、それは n 個の任意定数を含んでいる。すなわち

$$x = x(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (3.23)$$

と書ける。力学の問題には、時間 t を変数とする 2 階の微分方程式までしかあらわれない。

今までに出てきた運動方程式は、簡単に解けたので、とくに微分方程式の理論を応用する必要はなかった。Newton の運動の第 2 法則からえられるものは一般に 2 階の微分方程式であるが、いくつかの場合は、1 階の微分方程式を 2 度にわたって解くことにより、運動がもとまる。

そこでここでは**1 階の微分方程式**の解法とその図形的な意味について、概説しよう。

1 階微分方程式

$$F(t, x, \dot{x}) = 0 \quad (3.24)$$

を解くことの図形的な意味を考えてみよう。ここで求めるものは t - x 平面上の曲線 $x = x(t)$ である。これを $\dot{x}$ について解き

$$\dot{x} = R(t, x) \quad (3.25)$$

の形に直しておこう。これは、平面の各点において曲線に引いた接線の傾きを与えている。任意の点から出発して接線がこの方程式で与えられるものになるように曲線を伸ばしていったものを積分曲線という。ひとつの積分曲線はひとつの特解を与える。積分曲線のすべてが一般解を与える。こうして一つの任意定数を含んだ一般解が必ず存在することがわかる。

一般に $R(t, x) = P(x)Q(t)$ と書ける場合には、式 (2.44) は

$$\frac{dx}{dt} = P(x)Q(t) \quad (3.26)$$

となる。これを**変数分離形**の微分方程式という。これは $P(x) \neq 0$ の範囲内で

$$\frac{1}{P(x)} \frac{dx}{dt} = Q(t) \quad (3.27)$$

と変形できるから両辺を t で積分して、

$$\int \frac{1}{P(x)} \frac{dx}{dt} dt = \int Q(t) dt + C \quad (3.28)$$

を得る。式 (2.53) の左辺を置換積分法で変形して、

$$\int \frac{1}{P(x)} dx = \int Q(t) dt + C \quad (3.29)$$

を得る。この式が 1 個の任意定数 C を含む一般解を与える。

[例題 3-3] 次のような 1 階の微分方程式を解いて未知関数 $x(t)$ を求めてみよう。ここで、 k は定数。 $f(t)$ および $g(t)$ は与えられた関数である。

$$(a). \quad \dot{x} + kx = 0$$

$$(b). \quad \dot{x} + f(t)x = 0$$

$$(c). \quad \dot{x} + f(t)x = g(t)$$