

## 第2章 運動の記述

物理量は**スカラー**量または**ベクトル**量であらわされる。前者は大きさをあらわすものとして、後者は大きさと方向をもつ量として定義される。3次元**ユークリッド空間**のなかでの物体の**運動**を記述する**位置ベクトル**、**速度**、**加速度**などが導入される。また、微分方程式の解法が取り扱われる。

### 2.1 ベクトルの加法

#### 2.1.1 ベクトルの定義

物体の運動は、空間のなかでの移動としてとらえることができる。ある時刻での物体の**位置**を、観測者からの距離と方向できめることができる。また、物体の速度もどちら向きに、どれぐらいの速さで動くかによりきまる。これらの物理量は共にベクトルで表現することができる。

ベクトルは、幾何学的には図 ?? のように矢印を付した線分であらわすことができ、矢印の方向がベクトルの方向を示し、その長さがベクトルの大きさをあらわす。矢印が点Aから点Bに向かって引かれているとき、これを  $\overrightarrow{AB}$  と書くものとする。点A、点Bをベクトルの**始点**、**終点**と呼ぶことにする。この本ではベクトルを  $a, b$  などのゴシック体の文字であらわす。

ベクトル  $a$  の大きさを  $|a|$  であらわし、ベクトル  $a$  の**絶対値**という。それを  $a$  と書くことにする ( $|a| = a$ )。また、大きさがゼロのベクトルを**零ベクトル**といい、0 と書く。大きさ1のベクトルを**単位ベクトル**と呼ぶ。

#### 2.1.2 ベクトルの和

点Aから点Bへ物体が移動したとする。AからBへ向けてのベクトルを観測者CおよびDから見たとき、そのベクトルは同じように記述されねばならない。その意味でベクトルは、一般には基準点の取り方に関係なくきまる。

二つのベクトルを合成すると新たなベクトルができる。ベクトル  $\overrightarrow{CA}$ 、 $\overrightarrow{AB}$  からベクトル  $\overrightarrow{CB}$  が構成されるとき、ベクトル量は始点と終点できまる量であるから、ベクトルの向きを考慮して**ベクトルの和**を

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \quad (2.1)$$

と定義する。この和を図示すれば図 ?? のようになる。ベクトル  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CA}$ 、 $\overrightarrow{CB}$  をそれぞれ  $a, b, c$  とすれば、式 (2.1) は

$$c = b + a \quad (2.2)$$

と書ける。この和は**可換則**や**結合則**を満足している。

また、零ベクトルの性質から**負ベクトル**を定義できる。例えば、負ベクトル  $(-a)$  は

$$a + (-a) = 0 \quad (2.3)$$

を満たし、 $a$  と  $(-a)$  とは大きさが同じで方向が反対である。

#### 2.1.3 位置ベクトルとベクトルの成分

3次元ユークリッド空間のなかでベクトルを記述する。物体が空間の点Pにおかれ、観測者が点Oにいるとする。ベクトル  $\overrightarrow{OP}$  はある時刻での物体の位置を記述しているので、**位置ベクトル**と呼ぶ。観測者の位置に座標原点をとり、お互いに直交する直線 (**座標軸**) を選ぶ。この座標軸の組を**座標系**という。3次元の**直交座標系**を図 ?? のように設定したとき位置ベクトルを  $r$  であら

わす<sup>†</sup>。この座標系を**デカルト** (René Descartes) **座標系**とも呼ぶ。

この位置ベクトルを各座標軸へ射影したとき、その大きさを各**座標成分**あるいは単に**成分**という。例えば  $x$  軸に射影した長さをベクトル  $\mathbf{r}$  の  $x$  成分という。それぞれの座標成分を  $x, y, z$  とすれば、位置ベクトルは成分の組 (**座標**) として

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (2.4)$$

とあらわすこともできる。時間  $t$  での位置であることを強調したいときは

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (2.5)$$

と書くことにする。ピタゴラスの定理から位置ベクトルの大きさは

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.6)$$

で与えられる。

このように成分でベクトルをあらわしたとき、ベクトルの和

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \quad (2.7)$$

は、次のように成分ごとの和で計算される。すなわち、

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_3, y_3, z_3) \quad (2.8)$$

とすれば、

$$x_3 = x_1 + x_2 \quad (2.9)$$

$$y_3 = y_1 + y_2 \quad (2.10)$$

$$z_3 = z_1 + z_2 \quad (2.11)$$

である。

<sup>†</sup>  $x$ - $y$  面に対して  $z$  軸を設定するとき面には裏と表があり、二通りの方法がある。図 ?? のようにとったものを**右手座標系**といい、 $z$  軸を反対方向にとったものを**左手座標系**という。

## 2.2 ベクトルの乗法

### 2.2.1 スカラー積 (内積)

3次元空間での二つのベクトルを  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  とする。**スカラー積 (内積)** を

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (2.12)$$

と定義する。ここで、 $\theta$  は図??に示すように  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  とがなす角である。 $\theta = 0$  のとき、二つのベクトルは**平行**であるという。 $\theta = \pi/2$  のときは二つのベクトルは**直交**しているという。また、定義から

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (2.13)$$

である。

大きさが1の単位ベクトルを使うと、ベクトルの単位ベクトル方向の成分を計算することができる。いま、 $\mathbf{e}$  を単位ベクトルにとれば、図??に示すように  $\mathbf{e}$  方向へ射影した長さ  $a_e$  は内積の定義から

$$a_e = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{a}| \cos \theta \quad (2.14)$$

となる。

デカルト座標系の  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸方向の単位ベクトルを、それぞれ  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  とあらわせば、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の各座標の成分はスカラー積を使って書ける。 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  を**基本ベクトル**といい、それらは相互に直交している。

式 (2.14) から各成分は  $x = \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}$ ,  $y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{r}$ ,  $z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  となる。その結果を使えば、お互いに直交している単位ベクトルの性質から

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.15)$$

を得る。これは便利な表示である。二つの位置ベクトル  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  の内積を成分で書けば、分配則を使って、

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad (2.16)$$

となる。同じベクトルの内積  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$  を単に  $r^2$  と記すことにする。

基本ベクトルを成分であらわせば、

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

となる。

### 2.2.2 ベクトル積 (外積); (この項はあとまわし)

## 2.3 速度と加速度

3次元空間のなかでの物体の位置は、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  であらわされることを前節でみた。ここでは、物体の位置が時間的に変化する場合を考える。物体の位置的变化を記述するために時間  $t$  を空間とは独立に導入する。位置ベクトルは時間の関数で  $\mathbf{r}(t)$  と書ける。この  $\mathbf{r}(t)$  により物体は空間に曲線を描く。この曲線を軌道という。図??に示すように、 $t_1$  の時刻に物体が  $\mathbf{r}_1$  に、 $t_2$  の時刻に物体が  $\mathbf{r}_2$  にいたとすれば、位置ベクトルの時間的变化から速度  $\mathbf{v}$  を

$$\mathbf{v} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} \quad (2.17)$$

と定義する。これは位置ベクトルの時間微分である。速度の絶対値が速さである。成分で記せば、次のようになる。

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (2.18)$$

図??に示すように速度の時間的变化から加速度  $\alpha$  を

$$\alpha = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} \quad (2.19)$$

と定義する。これは速度の時間微分である。位置ベクトルであらわせば、

$$\alpha = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.20)$$

となる。成分で記せば、

$$\alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \left( \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \quad (2.21)$$

である。

位置ベクトルは長さの次元  $[L]$  をもつ。速度の次元は  $[LT^{-1}]$ 、加速度の次元は  $[LT^{-2}]$  となる。また、MK S 単位系では、長さ、速度、加速度の単位はそれぞれ (m), (m · s<sup>-1</sup>), (m · s<sup>-2</sup>) となる。

**[例題 2-2]** 物体が半径  $r_0$  の円周上を速さ  $v_0$  の等速円運動している場合を考える。ここで  $r_0, v_0$  は定

数である。この運動は基本的な運動で、近似的に地球のまわりの月の運動などで見ることができる。

- 1) 速度と位置ベクトルが直交していることを示せ。
- 2) 速度と加速度が直交していることを示せ。
- 3) 加速度の大きさを求めよ。

**解答：** 等速円運動であるという条件から、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  と速度  $\mathbf{v}$  は

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r_0^2, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_0^2$$

を満たす。

- 1) 第1式を時間で微分すれば、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$  を得る。したがって、両ベクトルは直交している。
- 2) 第2式を時間で微分すれば、加速度  $\alpha$  についての関係式  $\alpha \cdot \mathbf{v} = 0$  を得る。したがって、両ベクトルは直交している。
- 3)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$  を時間で微分すれば、 $\alpha \cdot \mathbf{r} = -v_0^2$  を得る。加速度と位置ベクトルは平行であるから  $|\alpha| = v_0^2/|\mathbf{r}|$  となる。この場合、向心加速度  $\alpha_c$  は

$$\alpha_c = -\frac{v_0^2}{r_0^2} \mathbf{r}$$

で定義される<sup>†</sup>。地球と月との運動を例として図??にこれらのベクトルの関係を示す。

## 2.4 演習問題 2

**2.1** ベクトルの加法について次の可換則および結合則が成立することを示せ。

1.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (可換則)
2.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (結合則)

**2.2** 次の式を示せ。ただし、 $f(t)$  はスカラー関数、 $\mathbf{a}(t)$  と  $\mathbf{b}(t)$  はベクトル関数である。

1.  $\frac{d(f(t)\mathbf{a}(t))}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\mathbf{a}(t) + f(t)\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}$
2.  $\frac{d(\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}$

**2.3** 位置ベクトル  $\mathbf{r}$  と一定なベクトル  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$  が与えられているとき、次の関係式を満たす曲面を求めよ。ここで  $a$  は 0 でない定数である。

1.  $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$
2.  $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$

<sup>†</sup> 向心加速度に物体の質量をかけた量を向心力という。

- 2.4 x-軸を水平に、y-軸を鉛直上方にとり、時刻  $t = 0$  で原点から x-軸に対して角度  $\theta$  をなす方向に大きさ  $V$  の速度で投げ出された物体の時刻  $t$  における位置  $(x, y)$  は

$$x = Vt \cos \theta \quad (2.22)$$

$$y = Vt \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.23)$$

により与えられる。任意の時刻  $t$  における速度と加速度をもとめよ。また高さが最高になる点の座標を求めよ。

- 2.5 xy-平面上を運動する物体の座標が時刻  $t$  をもちいて、

$$x = A \cos \omega t \quad (2.24)$$

$$y = B \sin \omega t \quad (2.25)$$

により与えられるとき、物体の描く軌跡の方程式を求めよ。速度を計算し、ホドグラフを描け。加速度は位置ベクトルとどのような関係にあるか。

- 2.6 xy-平面上を運動する物体の座標が

$$x = \cosh t \quad (2.26)$$

$$y = \sinh t \quad (2.27)$$

により、与えられるとき、物体の描く軌跡の方程式を求めよ。また任意の時刻における速度ベクトルと加速度ベクトルをもとめ、それらと位置ベクトルの関係をのべよ。

- 2.7 向きが時間的に変化する任意の単位ベクトルを  $\mathbf{n}(t)$  とする。 $\mathbf{n}$  は  $\dot{\mathbf{n}}$  と直交することを示せ。

- 2.8 任意のベクトル  $\mathbf{A}$  にたいして、

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \quad (2.28)$$

がなりたつことをしめせ。

- 2.9 発着時の加速度がそれぞれ  $\alpha, -\alpha$  で、 $V$  の速さしか出せない電車が  $L$  だけ離れた2駅間を走るのにかかる時間  $t_0$  を求めよ。ただし、 $\alpha > 0$  とする。

1.  $\alpha L > V^2$  の場合

2.  $\alpha L < V^2$  の場合

## 2.5 演習問題2の解答例

2.1 1.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2) = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

2.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

2.2 1.  $\frac{d}{dt}(fa_x, fa_y, fa_z) = \left(\frac{df}{dt}a_x + f\frac{da_x}{dt}, \frac{df}{dt}a_y + f\frac{da_y}{dt}, \frac{df}{dt}a_z + f\frac{da_z}{dt}\right) = \frac{df}{dt}\mathbf{a} + f\frac{d\mathbf{a}}{dt}$

2.  $\frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{dt} = \frac{d}{dt}(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}$

- 2.3 1.  $[(x, y, z) - (0, 0, a)] \cdot (0, 0, a) = (x, y, z - a) \cdot (0, 0, a) = (z - a)a = 0$ 。これより  $z = a$ 。したがって、 $\mathbf{r} = (x, y, a)$ 。(0, 0, a) を通り  $z$  軸に垂直な平面。

2.  $[(x, y, z) - (0, 0, a)] \cdot (x, y, z) = (x, y, z - a) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - a)z = 0$  したがって、 $x^2 + y^2 + (z - a/2)^2 = a^2/4$ 。原点と (0, 0, a) を直径の両端とする球。

2.4 略

2.5 略

2.6 略

2.7 略

2.8 略

- 2.9 かかった時間を  $t_0$  とする。いま加速度運動している間に電車は隣の駅に着いたとすれば、 $t_0 = 2V/\alpha$  となり、 $L = V^2/\alpha$  を得る。したがって、 $L > V^2/\alpha$  ときは速度  $V$  での等速運動を生じるが、 $L < V^2/\alpha$  のときは加速度運動のみで次の駅に着く。

1.  $L = V(t_0 - V/\alpha)$  より  $t_0 = (L/V + V/\alpha)$

2.  $L = \alpha t_0^2/4$  より  $t_0 = 2\sqrt{L/\alpha}$