

物理学Ⅰ 期末試験問題

(2007年8月3日)

解答はすべて答案用紙に記すこと。

答えだけでなく、それにいたった理由も明示すること。

教科書・ノートなどの参照は不可とする。

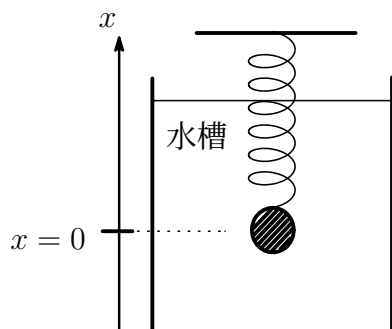
問1 xy 平面内を運動する物体に保存力が働いて、そのポテンシャルが

$$U(x, y) = x^4 - 2x^2 + 1 + 2y^2 \quad (1)$$

で与えられるとする。それ以外の力は働いていないとして、次の問いに答えよ。

- 物体に働く力の成分 F_x, F_y を座標 (x, y) の関数としてもとめよ。
- A 点 $(-1, 0)$ を初速 v で x 軸の正の方向に出発した質量 m の物体が B 点 $(1, 0)$ に達するための v の条件を求めよ。

問2 天井から質量が無視できる自然長 ℓ 、定数 k のバネをつるす。このバネの下端に質量 m の球状のおもりをつけると、重力のために、少し下がった位置で静止した。ここで図のように、おもりが水につかるように水槽のなかに入れる。おもりの浮力は無視できるとする。おもりの静止位置を原点とし、上向きを正方向として x 座標を導入する。そして、おもりに初速度をあたえて、水中で上下に運動させる。このとき、バネには Hooke の法則が成り立ち、水が物体の及ぼす力は、抵抗力 $-r\dot{x}$ であらわされるものと仮定する。



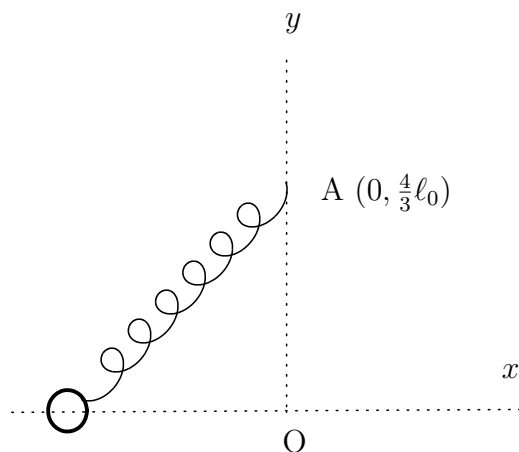
- この物体の運動方程式を、 $x, \dot{x}, \ddot{x}$ および定数 m, k, r を使って書き表せ。

- いま、 $r^2 < 4mk$ とする。このとき、 $t = 0$ で初期条件 $x = 0, \dot{x} = v_0$ (ただし $v_0 > 0$) を与えたら、物体が次式の減衰振動を始めた。

$$x(t) = Ae^{-Bt} \sin(Ct) \quad (2)$$

このとき、定数 A を m, k, r, v_0 で、定数 B を m, r で、定数 C を m, k, r であらわせ。

問3 滑らかな水平面上に x 座標と、 y 座標をとり、物体の位置を表すことにする。いま、 x 軸上に束縛された (すなわち、 x 軸上しか動けない) 質量 m の物体に自然長 ℓ_0 、定数 k のばねを結びつけ、ばねの他端を座標 $(0, \frac{4}{3}\ell_0)$ の位置 A に固定した。物体に摩擦ははたらかないとする。また、バネの張力に関しては、Hooke の法則が厳密にあてはまるものと仮定して、以下の問いに答えよ。



- 物体の位置エネルギー (ポテンシャルエネルギー) $U(x)$ をもとめよ。基準点はどこでもよいとする。
- 物体が $-\ell_0 \leq x \leq \ell_0$ の範囲で振動しているとき、もっとも速くなるときの速さ v を m, k, ℓ_0 を使って表せ。
- $x = 0$ 付近で微少な単振動をするときの周期 T を m, k を使ってあらわせ。

問4 (発展問題) 問2において、 $r^2 > 4mk$ とする。このとき、運動方程式の一般解 (2つの任意定数を含む解) を書き表せ。

問5 (発展問題) 問2において、 $r^2 > 4mk$ とする。 $t = 0$ で初期条件 $x = 0, \dot{x} = v_0$ (ただし $v_0 > 0$) を与えるとき、物体の運動をあらわす式 $x(t)$ をもとめよ。

(略解)

問1. (a) 一般公式 $\mathbf{F} = -\text{grad}U$ により、

$$\begin{aligned}(F_x, F_y) &= \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}\right) \\ &= (-4x^3 + 4x, -4y)(3)\end{aligned}$$

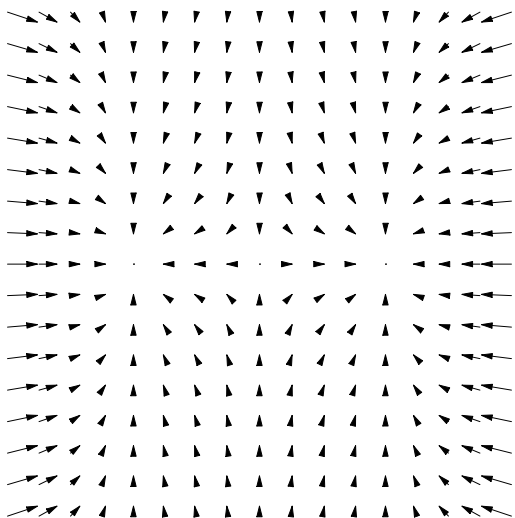


図1: 力場はこのようになる。

(b) x 軸上では $F_y = 0$ なので、この物体はx 軸からそれない。したがって、

$$U(x, y) = x^4 - 2x^2 + 1 + 2y^2 \quad (4)$$

を、 $y = 0$ に限定した、

$$U(x, 0) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \quad (5)$$

なるポテンシャルのもとでx 軸上を運動する。

A 点 $(-1, 0)$ を出発した物体が B 点 $(1, 0)$ にいたる途中でポテンシャルが最大となる $x = 0$ の点を通過しなけ

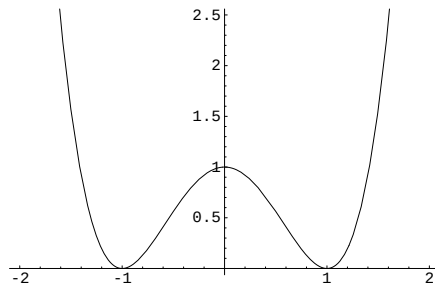


図2: $U(x, 0)$ のグラフはこのようになる。

ればならないので、この点で運動エネルギーをもつためには、

$$\frac{m}{2}v^2 > U(0, 0) = 1 \quad (6)$$

でなければならない。したがって、B に達するための条件は

$$v > \sqrt{\frac{2}{m}} \quad (7)$$

問2. (a)

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx \quad (8)$$

(b) このときは特性方程式

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0 \quad (9)$$

が虚数解

$$\lambda = \frac{1}{2m} \left\{ -r \pm i\sqrt{4mk - r^2} \right\} \quad (10)$$

をもち、一般解が

$$\begin{aligned}&e^{-\frac{r}{2m}t} \\ &\times \left\{ C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - r^2}}{2m}t\right) \right. \\ &\left. + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - r^2}}{2m}t\right) \right\} \quad (11)\end{aligned}$$

となる。これに初期条件を代入することによって次の形になる。

$$x(t) = Ae^{-Bt} \sin(Ct) \quad (12)$$

$$A = \frac{2mv_0}{\sqrt{4mk - r^2}} \quad (13)$$

$$B = \frac{r}{2m} \quad (14)$$

$$C = \sqrt{\frac{4mk - r^2}{4m^2}} \quad (15)$$

問 3. (a) 物体にはたらくバネの張力は、伸びたときのバネの長さを ℓ とすると、 $k(\ell - \ell_0)$ だが、これの x 成分は、

$$F_x = -k(\ell - \ell_0) \frac{x}{\ell}$$

ℓ を x であらわすと、 $\ell = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}\ell_0^2}$ だから

$$F_x = -kx + \frac{k\ell_0 x}{\sqrt{x^2 + \frac{16}{9}\ell_0^2}} \quad (16)$$

F_y は垂直抗力によって打ち消される。そこで、 $x = 0$ を基準点としたポテンシャルは

$$\begin{aligned} U(x) &= -\int_0^x F_x(x) dx \\ &= \frac{k}{2}x^2 - k\ell_0 \sqrt{\frac{16}{9}\ell_0^2 + x^2} + \frac{4}{3}k\ell_0^2 \quad (17) \end{aligned}$$

(別解)

位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）を求める際は、滑らかな拘束力は無視して、バネの弾性エネルギーだけを考えればよいから、伸びたときのバネの長さを ℓ とすると、

$$U(x) = \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 \quad (18)$$

ℓ を x であらわすと、 $U(x)$ は、

$$\frac{kx^2}{2} - k\ell_0 \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}\ell_0^2} + \frac{25k}{18}\ell_0^2 \quad (19)$$

これと定数だけ異なっているが正解である。たとえば、もっとも簡潔な表式は

$$\frac{kx^2}{2} - k\ell_0 \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}\ell_0^2} \quad (20)$$

だがこれでもよい。

(b) $x = \pm\ell_0$ で折り返すので、 $v = 0$ となり、 $x = 0$ では一番速くなる。力学的エネルギー保存則を適用して、

$$U(\pm\ell_0) = \frac{m}{2}v^2 + U(0) \quad (21)$$

より、

$$v = \sqrt{\frac{k}{3m}}\ell_0 \quad (22)$$

(c) $U(x)$ を $x = 0$ の回りでテイラー展開すると、 $U''(0) = \frac{k}{4}$ なので、

$$U(x) = \text{定数} + \frac{k}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \quad (23)$$

これから、微少振動の周期は

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる。

問 4. (発展問題) 問 2 において、 $r^2 - 4mk > 0$ であるので、

$$h_1 = \frac{1}{2m} \left\{ r - \sqrt{r^2 - 4mk} \right\} \quad (24)$$

$$h_2 = \frac{1}{2m} \left\{ r + \sqrt{r^2 - 4mk} \right\} \quad (25)$$

とすると、 $\lambda = -h_1, -h_2$ となり、 $h_1 < h_2$ である。そこで一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$x(t) = C_1 e^{-h_1 t} + C_2 e^{-h_2 t} \quad (26)$$

で表される。

問 5. (発展問題) 一般解 $(C_1 e^{-h_1 t} + C_2 e^{-h_2 t})$ に $t = 0$ での初期条件 $x = 0, \dot{x} = v_0$ をつかって、

$$C_1 = -C_2 = \frac{\sqrt{r^2 - 4mk}}{m} \quad (27)$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{\sqrt{r^2 - 4mk}} \{e^{-h_1 t} - e^{-h_2 t}\} \quad (28)$$

となる。