

物理学I中間試験問題 (2007年6月15日)

解答はすべて解答用紙に記すこと。

答えだけでなく、それにいたった理由も明示すること。

教科書・ノートなどの参照は不可とする。

問 1. 傾斜角 θ の斜面上を質量 m の物体が運動するとき、物体と斜面との動摩擦係数を μ' 、重力の加速度の大きさを g として、次の問に答えよ。ここで、斜面に沿って、上向きに x 座標をとるものとする。また、 $\mu' < \tan \theta$ とする。

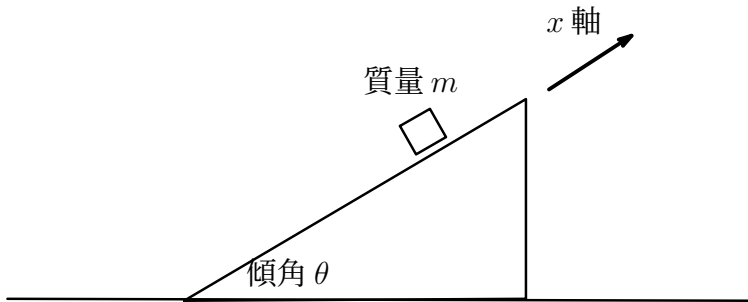


図 1: 動摩擦係数 μ' のある斜面をすべる物体

(a) 物体が滑りながら上昇するときの加速度を g, θ, μ' で表せ。

(b) 物体が滑りながら下降するときの加速度を g, θ, μ' で表せ。

問 2. お互いに直交する一様で一定な電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ が作用しているなかでの、荷電粒子の運動を考える。右手座標系で $\mathbf{E} = (0, E_0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ となる時、以下の問に答えよ。

(a) 粒子の質量と電荷を m, q とし、速度の成分を (v_x, v_y, v_z) として、運動方程式を書け。

(b) このとき荷電粒子が一定の速度で通り抜けられる場合がある。そのとき粒子はどのような速度をもてばよいか。ただし、 q, B_0, E_0 はどれも 0 でないとする。

問 3. 滑らかな水平面上に (x, y) 座標をとる。質量 m の物体が直線 $x = \ell$ 上になめらかに拘束されている。ゴムひもの一端を原点 O に固定し、他端を張力 S で引っ張って物体にとりつけた。ゴムひもの張力 S は不変であるとして以下の問にこたえよ。

(a) 物体にはたらく力がつりあう位置をもとめよ。

(b) 物体の運動方程式が

$$m\ddot{y} = -\boxed{(イ)} y$$

とかけるとして、空欄 (イ) をうめるべき数式を ℓ, S であらわせ。ただし、 $|y|$ が ℓ にくらべて微小であるときを考えるものとする。

(c) 物体が平衡点の付近で微小な単振動をするときの周期を求めよ。

問 4. (発展問題) 傾斜角 θ の斜面上を質量 m の物体が運動するとき、物体と斜面との動摩擦係数を μ' として、次の問に答えよ。斜面に沿って、上向きに x 座標をとるものとする。また、重力の加速度を g とし、 $\mu' < \tan \theta$ とする。

- (a) 時刻 $t = 0$ で、 $x = 0$ において、物体に上向きに初速 V_1 を斜面にそってあたえるとき、物体は最高点 $x = L$ に到達した。そのときの x 座標 L を V_1, g, θ, μ' であらわせ。
- (b) 物体は最高点に到達した直後に滑降をはじめるものとする。再び出発点 $x = 0$ に戻ったときの速度が $v = -V_2$ であった。ただし、 $V_1 > V_2$ とする。このとき、 L を V_2, g, θ, μ' であらわせ。
- (c) 動摩擦係数 μ' を V_1, V_2, θ であらわせ。
- (d) L を V_1, V_2, g, θ であらわせ。
- (e) 時刻 t を横軸にとって物体が出発してから、その点にもどるまでの速度 $v(t)$ を表すグラフを描け。

問 5. (発展問題) お互いに直交する一様で一定な電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ が作用しているなかでの、荷電粒子の運動を考える。右手座標系で $\mathbf{E} = (0, E_0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ となるとき、以下の問に答えよ。重力は無視するものとする。

- (a) 粒子の質量と電荷を m, q とし、速度の成分を (v_x, v_y, v_z) として、運動方程式を書け。(再)
- (b) $t = 0$ で $\mathbf{v} = 0$ とする初期条件のもとで、 $\mathbf{v}$ の各成分を時刻 t の関数として表し、 (v_x, v_y) に関して、ホドグラフを描け。
- (c) $t = 0$ で $\mathbf{v} = 0, \mathbf{r} = 0$ とする初期条件のもとで、位置ベクトル $\mathbf{r}$ の各成分を時刻 t の関数としてもとめ、 (x, y) 平面における粒子の軌道を図に表せ。

問 1 解答。どちらの場合にも斜面からうける垂直抗力は $N = mg \cos \theta$ となる。また動摩擦は運動を妨げる方向にはたらく。

(a) 物体が斜面にそって上昇するときは、動摩擦は負になる。そのため運動方程式は、

$$m\alpha = -mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta \quad (1)$$

これより、

$$\alpha = -g(\sin \theta + \mu' \cos \theta) \quad (2)$$

(b) 物体が斜面にそって下降するときは、動摩擦は正になる。そのため運動方程式は、

$$m\alpha = -mg \sin \theta + \mu' mg \cos \theta \quad (3)$$

これより、

$$\alpha = -g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) \quad (4)$$

問 2 解答。(a)

$$m\dot{v}_x = qE_x + q(v_y B_z - v_z B_y) = qv_y B_0 \quad (5)$$

$$m\dot{v}_y = qE_y + q(v_z B_x - v_x B_z) = qE_0 - qv_x B_0 \quad (6)$$

$$m\dot{v}_z = qE_z + q(v_x B_y - v_y B_x) = 0 \quad (7)$$

(b) $\dot{v}_x = 0$ より、 $v_y = 0$ 、 $\dot{v}_y = 0$ より、 $v_x = \frac{E_0}{B_0}$ が得られるが、 $\dot{v}_z = 0$ からは新たな条件は生じない。したがって、速度の成分は

$$\left(\frac{E_0}{B_0}, 0, v_z \right)$$

ここで、 v_z はどんな値でもよい。

問 3 解答。(a) ゴムひもが x 軸となす角度を θ とすると、 $\tan \theta = y/\ell$ である。物体にはたらく合力のつりあいの条件は

$$F_x = -S \cos \theta + N = 0 \quad (8)$$

$$F_y = -S \sin \theta = 0 \quad (9)$$

これより、垂直抗力（拘束力） $N = S \cos \theta$ および、 $\theta = 0$ すなわち、 $y = 0$ がえられる。したがって物体の静止する位置は $(\ell, 0)$ である。

(b) θ が微小であるときは、 $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{\ell}$ だから、運動方程式は、

$$m\ddot{y} = F_y = -S \frac{y}{\ell} \quad (10)$$

したがって、(イ) $= \frac{S}{\ell}$ となる。

(c) 運動は角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{S}{m\ell}}$ の単振動になり、周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell}{S}} \quad (11)$$

である。

問 4 解答。(a)

$$L = \frac{V_1^2}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)} \quad (12)$$

(b)

$$L = \frac{V_2^2}{2g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)} \quad (13)$$

(c)

$$\mu' = \tan \theta \frac{V_2^1 - V_2^2}{V_2^1 + V_2^2} \quad (14)$$

(d)

$$L = \frac{V_1^2 + V_2^2}{4g \sin \theta} \quad (15)$$

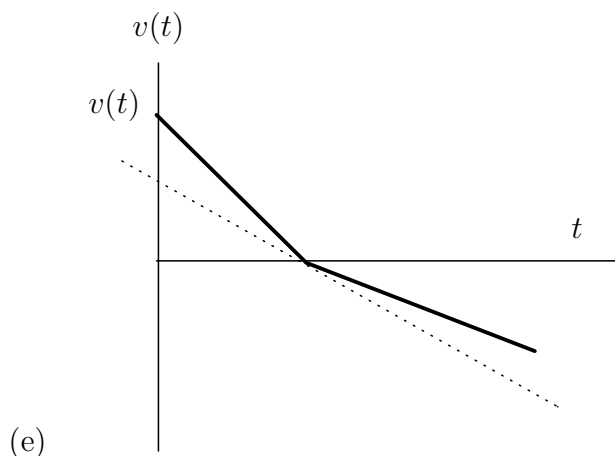


図 2: 摩擦のある斜面に沿って打ち上げられた物体の速度の時間変化。点線は動摩擦がないときの速度をしめす。

問 5 解答。(a) 粒子の質量と電荷を m, q とし、速度の成分を (v_x, v_y, v_z) とし、運動方程式を書け。
(再)

$$m\dot{v}_x = qv_y B_o \quad (16)$$

$$m\dot{v}_y = qE_0 - qv_x B_o \quad (17)$$

$$m\dot{v}_z = 0 \quad (18)$$

(b) $v_x - \frac{E_0}{B_0} = u_x, v_y = u_y, \omega = \frac{qB_0}{m}$ とすると、

$$\dot{u}_x = \omega u_y \quad (19)$$

$$\dot{u}_y = -\omega u_x \quad (20)$$

および、 $v_z = \text{一定}$ がえられる。初期条件を代入して、

$$u_x = -\frac{E_0}{B_0} \cos \omega t \quad (21)$$

$$u_y = \frac{E_0}{B_0} \sin \omega t \quad (22)$$

$$v_z = 0 \quad (23)$$

さらに、

$$v_x = \frac{E_0}{B_0}(1 - \cos \omega t) \quad (24)$$

$$v_y = \frac{E_0}{B_0} \sin \omega t \quad (25)$$

ホドグラフは、半径が $\frac{E_0}{B_0}$ 、中心が $(\frac{E_0}{B_0}, 0)$ の右回りの円になる。

(c)

$$x = \frac{E_0}{B_0}(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t) \quad (26)$$

$$y = \frac{E_0}{\omega B_0}(1 - \cos \omega t) \quad (27)$$

これは、一定速度で動く中心 $(\frac{E_0}{B_0}t, \frac{E_0}{\omega B_0})$ の回りを半径 $\frac{E_0}{B_0}$ で右回りに円運動をする点の軌跡なので、**サイクロイド**になる。