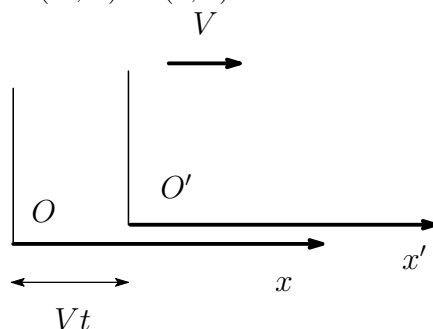


1 ガリレイ変換とローレンツ変換

われわれがニュートン力学に基づいて、古典的、常識的にはぐくんできた時間と空間の観念によると、慣性座標系の変換とは次のようなものである。

慣性座標系 O に対し速度 V で動いている慣性座標系を O' とし、同一の事件をそれらの座標系であらわしたものをそれぞれ (x, t) と (x', t') としよう。

$(x, t) = (0, 0)$ であれば、 $(x', t') = (0, 0)$ となるように原点をあわせるものとする。



このとき、

$$x' = x - Vt \quad (1)$$

$$t' = t \quad (2)$$

が成り立たなければならない。この変換式はガリレイ変換と呼ばれる。慣性系によって、時間のすすみ方が異なることなど考えなかった。

Einstein の特殊相対論の基本原則のひとつの光速不変の原理によれば、時刻も座標系によってことなることが避けられないことがわかったので、時間と空間の間により一般的な座標変換

$$x' = \alpha x + \beta t \quad (3)$$

$$t' = \gamma x + \delta t \quad (4)$$

を仮定し、妥当な条件を課すことによって、4つの定数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を決めてみよう。ここで、時間と空間を反対方向に目盛ることは考えないで、 $\alpha > 0, \delta > 0$ と仮定しよう。

この関係は行列を使うと、簡潔に表せる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (5)$$

妥当な条件の第1として、光速不変の条件

「 $x - ct = 0$ なら $x' - ct' = 0$ となり、 $x + ct = 0$ なら $x' + ct' = 0$ となる」ことを要求する。これから、

$$\gamma = \frac{\beta}{c^2} \quad (6)$$

$$\delta = \alpha \quad (7)$$

つぎに、二つの慣性系の相対速度は V なので、条件

「 $x' = 0$ なら $x - Vt = 0$ が成り立ち、 $x = 0$ なら $x' + Vt' = 0$ が成り立つ。」
 ことが正しくなければならぬが、後者をつかうと、

$$\beta = -v\alpha \quad (8)$$

がわかるので、次のように簡単になった。

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

さらにあとひとつの条件を見つければ十分である。われわれは、前の問題で解いた電車の問題にでてきた事件 a,b,c を二つの慣性系で表したことがあるので、それを利用してみよう。

表 1: 事件の座標

	慣性系 S	慣性系 S'
事件 O	$(0, 0)$	$(0, 0)$
事件 a	$(\frac{L}{1-\frac{v}{c}}, \frac{1}{c} \frac{L}{1-\frac{v}{c}})$	$(L', \frac{L'}{c})$
事件 b	$(-\frac{L}{1+\frac{v}{c}}, \frac{1}{c} \frac{L}{1+\frac{v}{c}})$	$(-L', \frac{L'}{c})$
事件 c	$(\frac{2v}{c} \frac{L}{k^2}, \frac{2}{c} \frac{L}{k^2})$	$(0, \frac{2L'}{c})$

ここでももちろん、次の関係がある。

$$L = kL' \quad (10)$$

$$k = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11)$$

問題

上の条件から $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を決定せよ。

(答え) 一番簡単なのは、事件 c を使うことである。

$$\alpha = \delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \beta = \frac{-V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \gamma = \frac{-\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

2 ローレンツ変換とその逆変換

こうして、二つの慣性系の間の次のような座標変換が求まった。

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (12)$$

$$t' = \frac{-\frac{V}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (13)$$

問題

上式を (x', t') について解け。

(答)

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (14)$$

$$t = \frac{\frac{V}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (15)$$

これらの変換を活用して、特殊相対論のパラドックスである

- 運動物体の短縮
- 動いている時計の遅れ

を導くことができる。

3 相対論的速度の合成則

座標系 O に対し速度 V で動いている座標系を O' としよう。

座標系 O' で、速度 V' で動いている物体の座標を (x', t') は、

$$x' = V't' \quad (16)$$

を満たすので、これを座標系 O でみてみよう。

問題

このとき、

$$x = \left(\frac{V + V'}{1 + \frac{VV'}{c^2}} \right) t \quad (17)$$

が成り立つことをしめせ。

問題

$0 < V < c, 0 < V' < c$ ならば、

$$0 < \frac{V + V'}{1 + \frac{VV'}{c^2}} < c \quad (18)$$

となることを示せ

(答)

$$(1 - \frac{V}{c})(1 - \frac{V'}{c}) = 1 + \frac{VV'}{c^2} - \frac{V + V'}{c} > 0 \quad (19)$$

から示せる。

上の式からわかるように物体の速度は光速を超えることはできない。ロケットを順次に加速していても、ロケットの速度が光を追い越すことにはならない。

今度はローレンツ変換を2度行くとどんなローレンツ変換になるか考えよう。

つぎの問題は計算しなくても、上の結果を応用すればできるはずである。

座標系 O に対し速度 V で動いている座標系を O' とし、座標系 O' に対し速度 V' で動いている座標系を O'' としよう。

同一の事件をこれらの座標系 O, O', O'' であらわした座標をそれぞれ (x, t) 、 (x', t') 、 (x'', t'') とすると、 (x, t) と (x'', t'') を結ぶ Lorentz 変換がもとまる。それは

$$x'' = \frac{x - V''t}{\sqrt{1 - \frac{V''^2}{c^2}}} \quad (20)$$

$$t'' = \frac{-\frac{V''}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \frac{V''^2}{c^2}}} \quad (21)$$

というかたちになるはずである。

問題

このとき、 V'' を V と V' であらわせ。

(答え)

$$V'' = \frac{V + V'}{1 + \frac{VV'}{c^2}}$$

なお、速度の相対論的な合成則に関する問題は

ソコロフスキー著、林昌樹訳「相対性理論の問題と解法」

たくさん集めてありますので参考にしてください。