

一般相対性理論

§ 1. 非ユークリッド幾何学の発見

§ 2. 一般相対論は易しい

——林檎の皮むきとリーマン曲率——

§ 3. リーマン幾何学

§ 4. 4次元時空

§ 5. アインシュタイン方程式

§ 6. 質量による時空のゆがみ

(Schwarzschild の解)

§ 7. 重力レンズ

§ 1 非ユークリッド幾何学の発見

ユークリッド(330BC?-275BC?)の著した『幾何原本』の第 5 公準はいわゆる平行線公理である。

「平面内の直線の外の一点をとおり、それに交わらない直線が 1 本だけ存在する」

これによって、3 角形の内角の和が 180° であることを証明できる。

近世になって Euclid 幾何学が唯一の幾何学かどうか疑う人々が出てきた。

ついに 19 世紀初頭になって、

ロシアの N.L.Robatchevsky

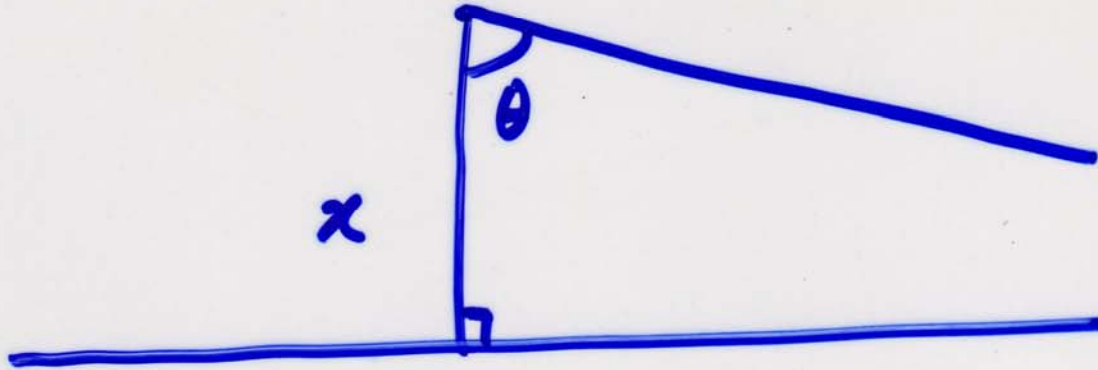
ハンガリーの Janos Bolyai

の二人が今日、双曲線幾何学とよばれる

非ユークリッド幾何学

を独立に発見した。

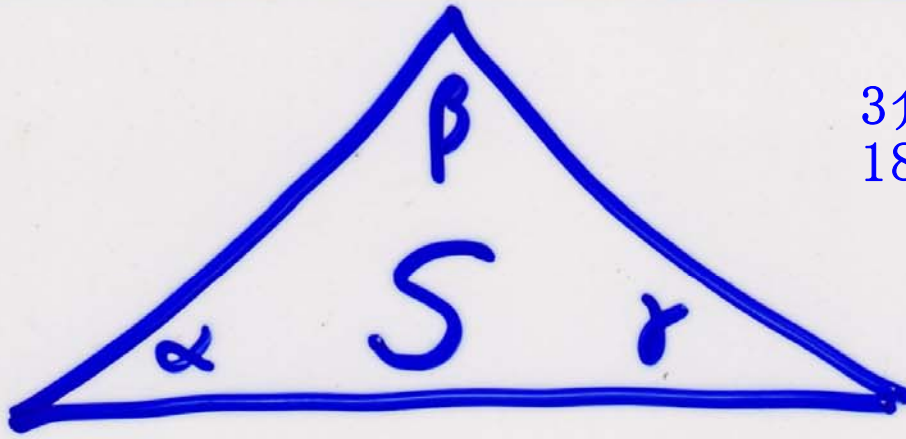
双曲幾何



平行角 $\theta(x)$

$$\tan \frac{\theta(x)}{2} = e^{-\frac{x}{a}}$$

a は空間固有の長さ



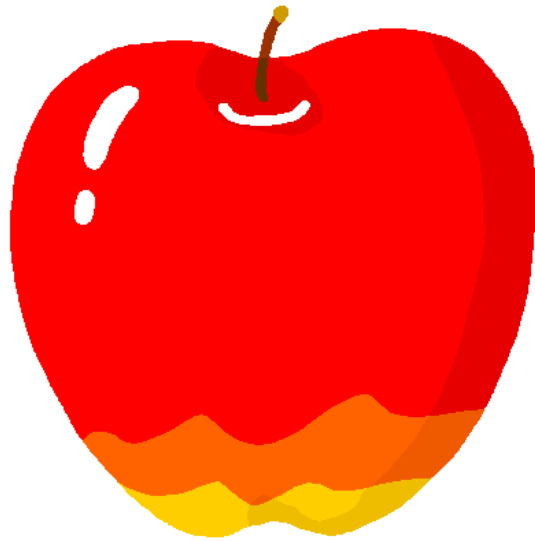
3角形の内角の和は双曲幾何学では 180° より小さい。

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \frac{S}{a^2}$$

が双曲幾何学 $K = -\frac{1}{a^2}$

§ 2 一般相対論は易しい

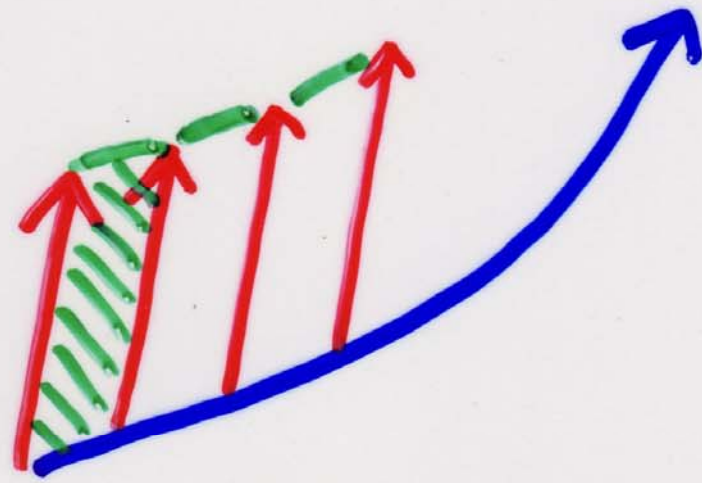
——リンゴとバナナの皮むき——



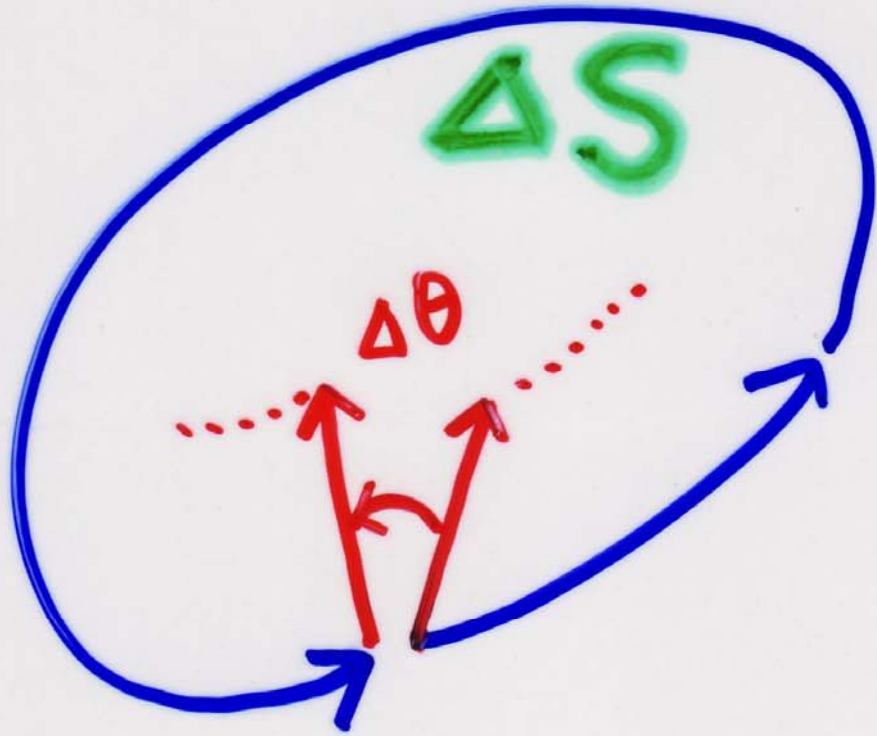
リンゴの皮むき

曲った空間での
ベクトルの平行移動

曲面上にとつた ループに沿って
ベクトルを平行移動してみよう



いつも微小な
平行四辺形を
作りながら
進むこと



$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta S} = K$$

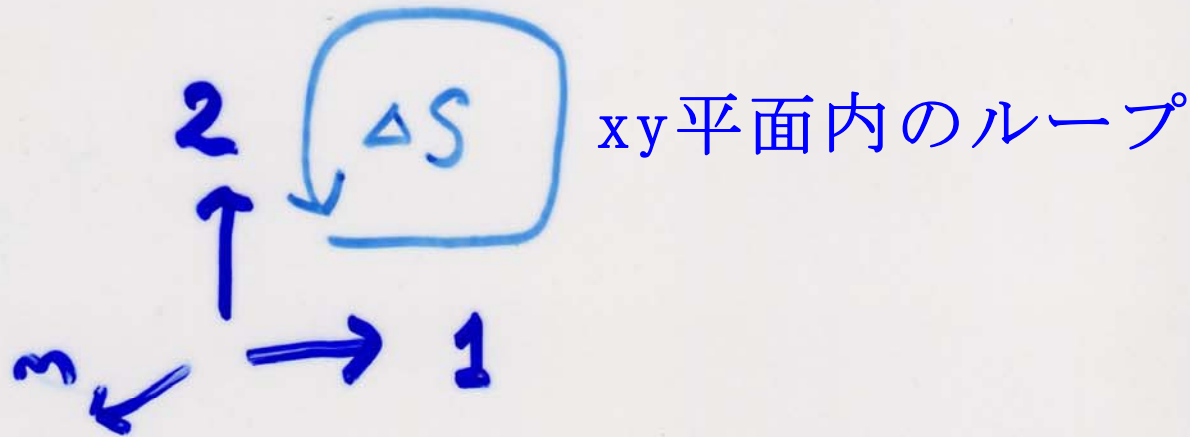
ガウスの
曲率

3次元の曲った空間では

(1 2 $\bar{1}$ $\bar{2}$) のル-7° につい

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta S} = R_{1212}$$

断面曲率



$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} \\ = R_{2121}$$

R_{1213} もあるよ!

R_{ijkl} リーマンの曲率

n :次元 Riemann 空間

$$R_{ij} = \sum_{l=1}^n R_{iljl}$$

リッチ テンソル

$$R = \sum_{l=1}^n R_{ll}$$

スカラー-曲率

§ 4 4次元時空

時空の事象点 P の座標を

$$P = (x, y, z, ct) = (x^1, x^2, x^3, x^4)$$

とすると、特殊相対論では \mathbb{R}^4 上の T_g の

時空を \mathbb{R}^4 上の \mathbb{R}^4 の

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

である。

一般相対論は曲、 t : 4次元

時空を考えるので、微小に隣

合う2点間のきまり ds は

$$ds^2 = g_{11}(x)(dx^1)^2 + g_{22}(x)(dx^2)^2 + g_{33}(x)(dx^3)^2 - g_{44}(x)(dx^4)^2$$

とあり $g_{ij}(x)$ のことを計量テンソルと

呼ぶ。

一般相對論的時空

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

$$x = (x, y, z, ct)$$

曲った時空の幾何学

曲率

$$R_{ijkl}(x)$$

$$R_{ij}(x)$$

$$R(x)$$

$$g_{ij} \xrightarrow{\text{平坦}} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

page 17

アインシュタイン方程式

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 8\pi G T_{ij}$$

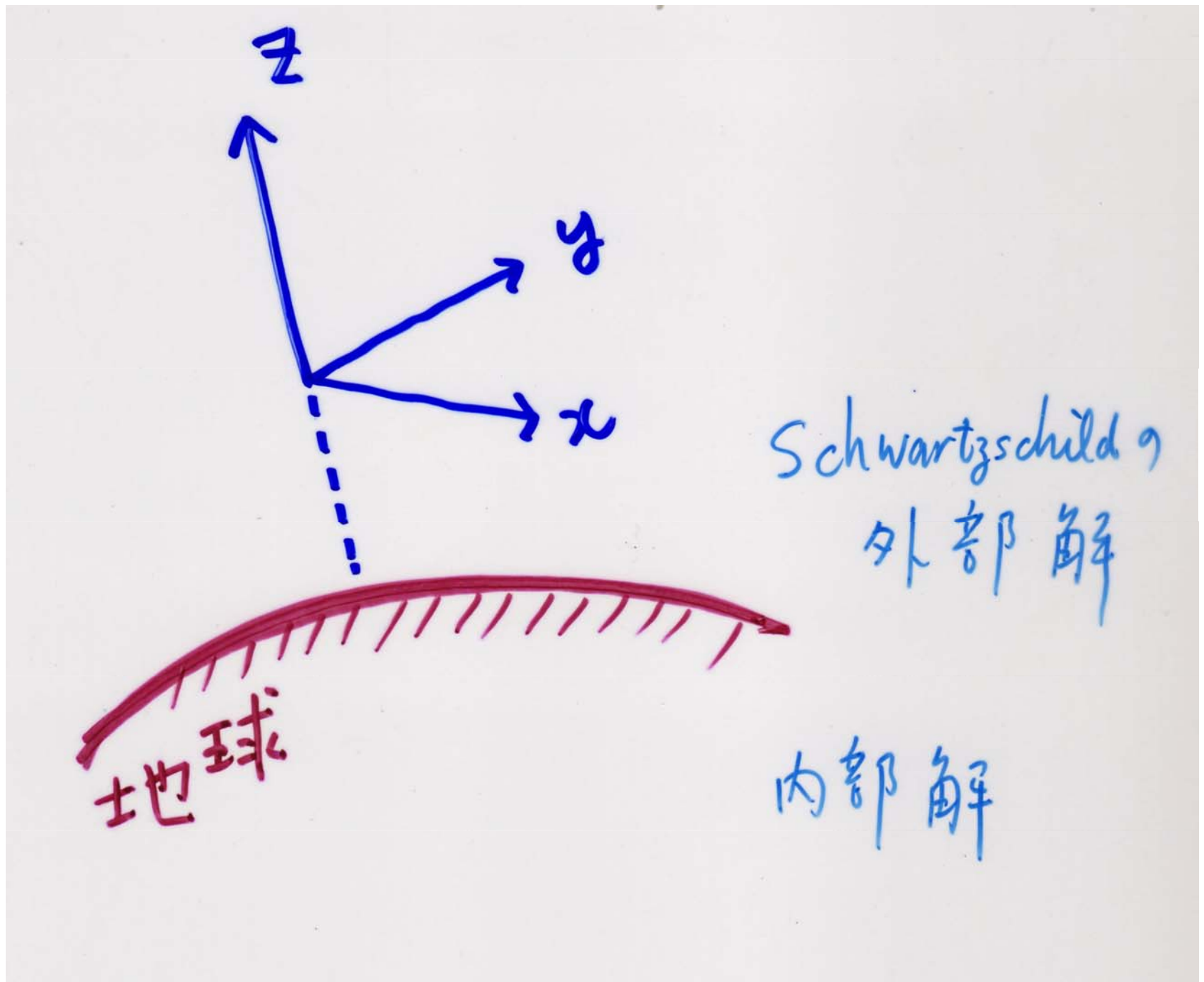
T_{ij} : エネルギー-運動量テンソル

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, 3 \\ j = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

g_{ij} は計量テンソル

page. § 6 質量による時空のゆがみ



内部解

地球内部での非ユークリッド
~~幾何学~~ 幾何学

$$\text{ガウス曲率} = K = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} = (1.7 \times 10^8 \text{ km})^{-2}$$

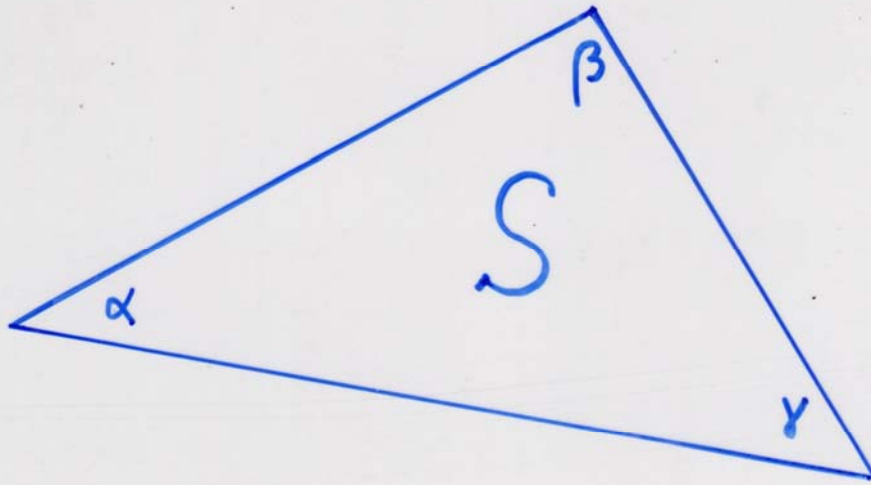
円周の長さ

$$l = 2\pi \frac{\sin \sqrt{K} r}{\sqrt{K}} = 2\pi \left(r - \frac{K r^3}{6} \right)$$

一球の一周 = 4万km - 0.95cm

地球表面で成り立つ幾何学

非ユークリッド性



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \Delta\theta$$

地上の垂直面では

$$\Delta\theta = -\frac{v^2 S}{c^2 R^2}$$

地上の水平面では

$$\Delta\theta = \frac{2v^2 S}{c^2 R^2}$$

(c = 光速, v = 人工衛星速度, R = 地球半径)

高所ほど時間が早くすすむ

$$\Phi = \text{重力ポテンシャル} = gh \text{ とし}$$

$$\therefore \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{g}{c^2} \Delta h$$

$$\tau = 100 \text{ 年}$$

$$\Delta h = 10,000 \text{ m}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

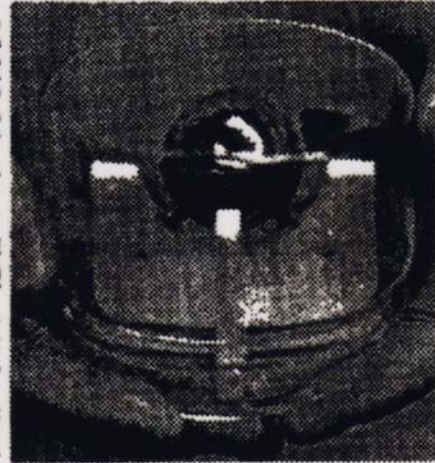
$$\Delta\tau = 0.003 \text{ 秒}$$

アインシュタイン博士が予言



▼時空のゆがみ 衛星で探れ!

米航空宇宙局(NASA)は二日、二十世紀を代表する天才物理学者アインシュタイン博士の写真、APFが予言した「時空のゆがみ」を観測



「時空のゆがみ」を検出するため、衛星に搭載されるジャイロスコープ(APF)

するため、地球を周回する衛星を十七日に米カリフォルニア州の空軍基地から打ち上げると発表した。
一九一六年に博士が発表した一般相対性理論によると、重い物体があると、その周囲の時間と空間にゆがみができる。ゆがみの存在は、遠方の天体の観測を通じほぼ立証されているが、NASAはこの

NASA 17日打ち上げ

衛星を用い、地球の周囲でも生じていると考えられるゆがみの直接検出を狙う。
衛星は、極めて精巧にできたジャイロスコープ(姿勢監視装置)を四つ搭載、高度六百四十キロを周回し、一年以上観測を続ける。時空のゆがみによってジャイロ回転軸に小さなずれが起ると予想されている。



- + Low Bandwidth
- + Non-Flash Version
- + Contact NASA

FIND IT @ NASA

+ GO

- [+ ABOUT NASA](#)
- [+ NEWS & EVENTS](#)
- [+ MULTIMEDIA](#)
- [- MISSIONS](#)
- [+ POPULAR TOPICS](#)
- [+ MyNASA](#)

+ Home

Missions

- MISSIONS HIGHLIGHTS
- + MISSION OVERVIEWS
- + SHUTTLE AND STATION
- + LOOKING AT EARTH
- + EXPLORING OUR SOLAR SYSTEM
- + SPACE SCIENCE & TECHNOLOGY
- + DEEP SPACE MISSIONS
- + RESEARCH AIRCRAFT

MISSION NEWS

Gravity Probe Launched

04.20.04

Gravity Probe B was successfully launched on its mission to test two extraordinary predictions of Albert Einstein's general theory of relativity.

Image to right: Gravity Probe B takes to the sky from Vandenberg Air Force Base, California. Credit: NASA

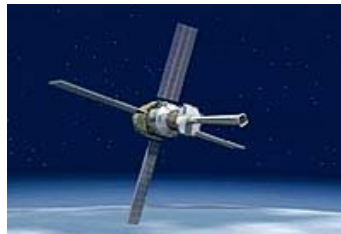


After a 24-hour delay, Gravity Probe B (GP-B) was launched Tuesday, April 20 at 12:57 p.m. EDT on board a Boeing Delta II rocket from Vandenberg Air Force Base, on the central coast of California.

GP-B is among the most thoroughly researched programs ever undertaken by NASA. GP-B will measure two parts of Einstein's general theory of relativity by assessing how the presence of Earth warps space and time, and how Earth's rotation drags space and time.

"The geodetic effect" describes how the presence of Earth changes space and time. Visually, it is similar to holding a bedsheet by four corners and placing a basketball in the center. The bedsheet will slightly wrap around the ball, somewhat similar to the way Earth warps space and time.

Image right: GP-B is among the most researched programs ever undertaken. Credit: NASA



GP-B will also measure the "frame dragging," the effect of Earth's rotation on space and time. Einstein predicted that very large objects in space distort time and space as they spin, like a tornado. Frame dragging has not been measured because the effect is so small that technology hasn't yet been able to record it.

The experiment uses three key components: a spinning sphere, a telescope and a star. Building GP-B required fundamental breakthroughs in a variety of technologies to ensure this experiment could be performed.

At the heart of the experiment are four gyroscopes, instruments for studying the Earth's rotation by means of a freely suspended flywheel. The gyroscopes for Gravity Probe B are not flywheels but electrically supported spheres, spinning in a vacuum.

Image to right: Four near perfect spheres will help to show if the earth twists time and space. Credit: NASA



The center of the gyroscope is a jewel-like sphere of fused quartz. These spheres, the size of Ping-Pong balls, are the roundest objects ever made by man. The tiny spheres are enclosed inside a housing chamber to prevent disruption from sound waves, and chilled to almost absolute zero to prevent their molecular structure from creating a disturbance. The accuracy of these gyroscopes is 30 million times greater than any gyroscope ever built.

RELATED MULTIMEDIA



Gravity Probe B

Relive the excitement of launch.

- [+ View this Video](#)
- [+ View More Videos](#)
- [+ View First Attempt](#)



Gravity Probe B

Pre-launch Briefing

Learn more about the GPB mission.

- [+ View this Video](#)
- [+ View Text Page](#)



Gravity Probe B

Web Photo Gallery

View images of the GPB spacecraft.

- [+ Visit the website](#)