

ブレイン・ワールドと超対称性

坂井 典佑 (東京工業大学)

先端科学トピックス 茨城大学理学系大学院 2007.5.14

目次

1	統一理論の現段階	3
1.1	標準模型	3
1.2	ニュートリノ振動: 最小標準模型に修正が必要	5
1.3	これから始まる実験	7
1.4	標準模型を超える統一理論の候補	8
2	ゲージ階層性問題の三つの解	11
2.1	複合ヒッグス粒子模型 (Technicolor)	11
2.2	超対称性	12
2.3	余剰次元模型 = ブレインワールド模型	13
3	超対称性	14

4	余剰次元模型 = ブレーンワールド模型	18
4.1	平坦で大きな余剰次元模型	18
4.2	ワープ計量模型	22
4.3	BPS ソリトン	25
5	ソリトンとしての壁 (ドメイン・ウォール)	26
6	$U(N_C)$ ゲージ理論, N_F ヒッグススカラー場	29
7	1/2 BPS 壁	31
8	Conclusion	36

1 統一理論の現段階

1.1 標準模型

数百 GeV 付近までの実験事実は**標準模型**でよく記述できる。

$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$: グルーオン, 光子, W^\pm , Z , ヒッグス粒子

クォーク	アップ ダウン	チャーム ストレンジ	トップ ボトム
レプトン	電子ニュートリノ 電子	ミューニュートリノ ミュー粒子	タウニュートリノ タウ粒子

標準模型の概念的成功

1. 電磁気力, 弱い力, 強い力を, **ゲージ原理**で(共通の)理解
2. 必然的に**新しい粒子**を予言する: W^\pm , Z^0 (1983), ...
3. くりこみ可能な理論 → **量子効果**を系統的に求めることができる。

標準模型の実験的検証

1. W , Z 粒子の発見: 1983 CERN

2. チャームクォークの発見 : 1974 SLAC, BNL
3. タウレプトンの発見 : 1977 SLAC
4. ボトムクォークの発見 : 1977 FNAL
5. トップクォークの発見 : 1995 FNAL

量子異常の相殺 → クォーク・レプトンが世代として対応して存在

トップクォークの発見 → 3世代クォークレプトンの完成

Z粒子の崩壊幅 → 軽いニュートリノは3種類までしか存在しない .

3世代クォークの存在 → CP非保存の記述が可能となる

Bファクトリー : Cabibbo・小林・益川行列による記述とその決定

最小標準模型で見つかっていない粒子 : **ヒッグス粒子**のみ .

LHC 加速器での実験の発見可能範囲内にあると思われる .

標準模型の問題点・不満足な点

1. 電磁気力, 弱い力, 強い力という三つの異なる相互作用に対応して三つの異なる**ゲージ結合定数**を仮定する .
→ 相互作用の強さは**統一されていない** .

2. 自然界では電子の電荷の整数倍の粒子のみ存在 (電荷の量子化)
標準模型は電荷の量子化を説明していない。
3. クォーク・レプトンの質量とそれらの間の混合角を記述できるが、説明できない。
4. 重力が取り入れられていない。

1.2 ニュートリノ振動: 最小標準模型に修正が必要

最小標準模型

1. ヒッグス場がひとつ
2. ニュートリノは左巻きのみ, 反ニュートリノは右巻きのみ (質量零)

ニュートリノが現れる典型的な現象

ニュートリノには弱い相互作用 (と重力) しか働かない。

1. ベータ崩壊

中性子 \rightarrow 陽子 + 電子 + 反電子ニュートリノ

ミュー粒子 \rightarrow 電子 + 反電子ニュートリノ + ミューニュートリノ

2. 荷電パイ粒子の崩壊

負パイ粒子 \rightarrow ミュー粒子 + 反ミューニュートリノ

観測装置の工夫

Kamiokande, SuperKamiokande, Kamland,...

1. 神岡鉱山などの地下に大きな測定器を置く (宇宙線などを遮る) .
2. 観測装置の中に大量の標的を置いて , 反応例を多くする .
3. 年単位の長い時間をかけて観測する .

4つの実験方法

1. 太陽ニュートリノ

太陽内部の核反応 (中性子 \rightarrow 陽子 + 電子 + 反電子ニュートリノ) など
で発生する (電子) ニュートリノを観測する

(電子) ニュートリノが予想値よりも少ない \rightarrow 他の種類のニュートリノ
に変化した (ニュートリノ振動)

2. 大気ニュートリノ

宇宙線が大気に衝突して発生するパイ粒子やミュー粒子が崩壊して
できる(ミュー)ニュートリノを観測する

地球の上側からと裏側からとを比較する → 差が観測された(ニュー
トリノ振動)

3. 原子炉ニュートリノ

原子炉で生じる(電子)ニュートリノを観測する

4. 長基線ニュートリノ

加速器で作ったニュートリノ・ビームを遠くの観測装置で見る。

ニュートリノは質量を持ち、振動する → 最小標準模型に修正必要。

1.3 これから始まる実験

LHC=**L**arge **H**adron **C**ollider

2007年末スイス・ジュネーブのCERNに完成予定

7TeV陽子と7TeV陽子を正面衝突させる

(今まで最高のエネルギーの7倍)

測定器は4つ: Atlas, CMS, LHCb, Alice,

期待される発見

ヒッグス粒子: ひとつか複数か?

標準模型を超える模型の粒子: 超対称粒子など

1.4 標準模型を超える統一理論の候補

1. 大統一理論

電磁・弱・強い力の強さは量子効果でエネルギーと共に変化する。

高エネルギーでひとつの結合定数(単一の群)になる可能性がある。

$$M_{\text{GUT}}c^2 \sim 10^{15} - 10^{16} \text{ GeV} \quad (1.1)$$

ゲージ結合定数の統一。

電荷の量子化が説明できる。

2. 超弦理論

量子重力を含む統一理論

紫外発散がないと考えられる理由がある。

10次元または11次元のような高次元時空が基本。

摂動論的にはいくつかの超弦理論が構成されている。

非摂動論的にはすべて同一の理論だという証拠がある (双対性) .

ゲージ階層性問題

電弱統一理論のエネルギースケール

$$M_W c^2 \sim 10^2 \text{ GeV} \quad (1.2)$$

に比して, 大統一理論スケール $M_{\text{GUT}} c^2 \sim 10^{15} \text{ GeV}$ はきわめて大きい

$$M_W^2 / M_{\text{GUT}}^2 \sim 10^{-26} \ll 1 \quad (1.3)$$

さらに重力はニュートンの万有引力として観測されている .

$$V(r) = -G_N \frac{m_1 m_2}{r} \quad (1.4)$$

ニュートンの万有引力定数 G_N をエネルギーに換算すると

$$M_P c^2 \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} c^2 = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV} \quad (1.5)$$

この(量子)重力のスケール(プランクエネルギー)は, もっと大きい

$$M_W^2 / M_P^2 \sim 10^{-34} \ll 1 \quad (1.6)$$

この大きなスケールの違いを説明することが**ゲージ階層性問題**である。

$M_W \leftrightarrow$ ヒッグススカラー場のポテンシャルの質量パラメーター

自然な説明を与える = **対称性の意味で説明を与える**

対称性に基づく理由によって、パラメーターの小ささを**説明**する

「パラメーターを零にする極限で対称性が増える」

対称性から自然に階層性を説明できる例

1. 質量零のスピン1/2粒子 \leftrightarrow **カイラル対称性**

2. 質量零のベクトル粒子 \leftrightarrow **ゲージ対称性**

階層性が自然に説明できない例

質量零のスカラー粒子 \rightarrow **スケール不変性** (古典論)

場の量子論 \rightarrow スケール不変性が破れる (発散, くりこみ必要)

質量零になっても対称性は増えない。

2 ゲージ階層性問題の三つの解

2.1 複合ヒッグス粒子模型 (Technicolor)

ヒッグス粒子は基本粒子ではないとするので、階層性問題はない。

ヒッグス粒子が存在しないので、スカラー粒子の質量を零にする対称性は必要なくなる。

しかし、ヒッグス粒子は複合粒子として説明する。

→ ヒッグス粒子は強く相互作用する

新しい粒子が TeV 程度で出現するはず

例：

パイ粒子は異常に軽い

この理由はアップ、ダウン・クォークがほとんど質量零だから
質量零のクォークにはカイラル対称性がある。

これが自発的に破れると、質量零の粒子が生じる。

クォークに少し質量があるので、パイ粒子も小さな質量が生じる。

この機構のエネルギースケールを千倍大きくした模型を考える。

L. Susskind, *Phys. Rev.* **D20** (1979) 2619; S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 1277; **D13** (1976) 974;
 S. Dimopoulos, and L. Susskind, *Nucl. Phys.* **B155** (1979) 237; ...

これらのモデルを作るには，非摂動的効果を用いる必要がある．

クォーク・レプトンの質量と混合角の実験事実に矛盾しないモデルを作ることが難しい．

そのため，物理現象に矛盾しないモデルを構成することはできていない．

2.2 超対称性

質量零のスカラー粒子を説明する対称性：超対称性

対称性の理由で，スカラー粒子の質量が零(小さい)ことを説明する．

$$\begin{array}{rcl}
 \text{スピン } 0 & : & m_B \\
 \downarrow & & m_B = m_F \leftarrow \text{超対称性} \\
 \text{スピン } \frac{1}{2} & : & m_F \\
 & & m_F = 0 \leftarrow \text{カイラル対称性}
 \end{array}$$

S. Dimopoulos, H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 150; N. Sakai, *Z.f. Phys.* **C11** (1981) 153; E. Witten,
Nucl. Phys. **B188** (1981) 513; ...

超対称性があると，スカラー場の質量 $\rightarrow 0$ でカイラル対称性が生じる．

ヒッグス場が基本粒子として存在する .

摂動論で取り扱える模型ができる → (最小) 超対称標準模型 (MSSM)

MSSM は今までの実験事実のどれとも矛盾はない .

今日では実験を計画する際の指標となっている .

2.3 余剰次元模型 = ブレーンワールド模型

4次元時空は高次元 ($4 + n$) 時空中の壁状の部分空間 (ブレーン)

重力は高次元時空に伝播する → 有効な重力が弱くなる .

n 次元が $2\pi R$ で周期的だとすると ,

$$V_{4+n}(r) = \frac{1}{(M_{(4+n)})^{2+n}} \frac{M_1 M_2}{r^{1+n}} \sim \frac{1}{(M_{(4+n)})^{2+n} R^n} \frac{M_1 M_2}{r}, \text{ for } r \gg R$$

$$M_P^2 = (M_{(n+4)})^{2+n} R_1 \cdots R_n \left(\frac{c}{\hbar}\right)^n \rightarrow$$

高次元基本理論の重力定数 $M_{(4+n)} \ll M_P \sim 10^{19}$ GeV

ゲージ階層性が必要なくなる

P.Horava and E.Witten, Nucl.Phys.**B475**, 94 (1996); N.Arkani-Hamed, S.Dimopoulos, G.Dvali,

Phys.Lett.**B429** (1998) 263 ; I.Antoniadis, N.Arkani-Hamed, S.Dimopoulos, G.Dvali,

3 超対称性

最小超対称標準模型の予言

1. **ヒッグス粒子**は最低限二つの複素二重項 H_1, H_2 が存在する。(最小非超対称標準模型の倍)

その結果, 観測される物理的なヒッグス粒子は,

- (a) 最小非超対称標準模型の場合: $4 - 3 = 1$

(複素2成分 H のうち3自由度は W^\pm, Z に吸収される)

中性スカラー粒子 h がひとつだけある.

- (b) 最小超対称標準模型の場合: $8 - 3 = 5$

(H_1, H_2 のうち3自由度は W^\pm, Z に吸収される)

中性スカラー粒子が3つ (h, H, A) と, 荷電スカラー粒子 (H^+, H^-).

2. Lightest Supersymmetric Particle が**暗黒物質**の自然で有力な候補となる.

Rパリティという離散的対称性を課す. これによって, 標準模型の粒子がRパリティ正, その超対称パートナーがRパリティ負になる.

その結果，超対称パートナーの中で最も軽い粒子が安定になる．その粒子をLSPと呼ぶ．その粒子は安定で，相互作用が大変弱い．したがって，暗黒物質の最も良い候補である．

3. fine tuningが不要，またはより少ない．

(a) 古典論のレベルでヒッグス粒子が質量なしであれば，量子効果によって質量が生じない．

超対称性モデルでは**非くり込み定理**が成り立って，古典論のレベルで一度調節しておけば，高次量子効果によって，質量の関係が大きくずれることはない．

(b) ヒッグス粒子の超対称パートナーがカイラル対称性を持つモデルを構成すれば，ヒッグス粒子も質量零となる．

4. **ゲージ結合定数の統一**の間接的証拠がある．

大統一理論が提案された後，その間接的検証のひとつとして，ゲージ結合定数の精密測定が提案された．三つの結合定数が高いエネルギーで次第に近づく方向に変化することはわかっているので，どこかで二つずつが一致することは必然である．しかし，三つの結合定数が同じエネルギーで一致することは非自明な制限を与える．

時間はかかったが，実験家たちの努力によって，この研究は着実に進歩し，図1のように，実を結んだ． $U(1), SU(2), SU(3)$ のゲージ結合定数の強さ $\alpha_i = g_i^2/4\pi$, ($i = 1, 2, 3$) の統一が超対称大統一理論ならば見事に実現することがわかる．

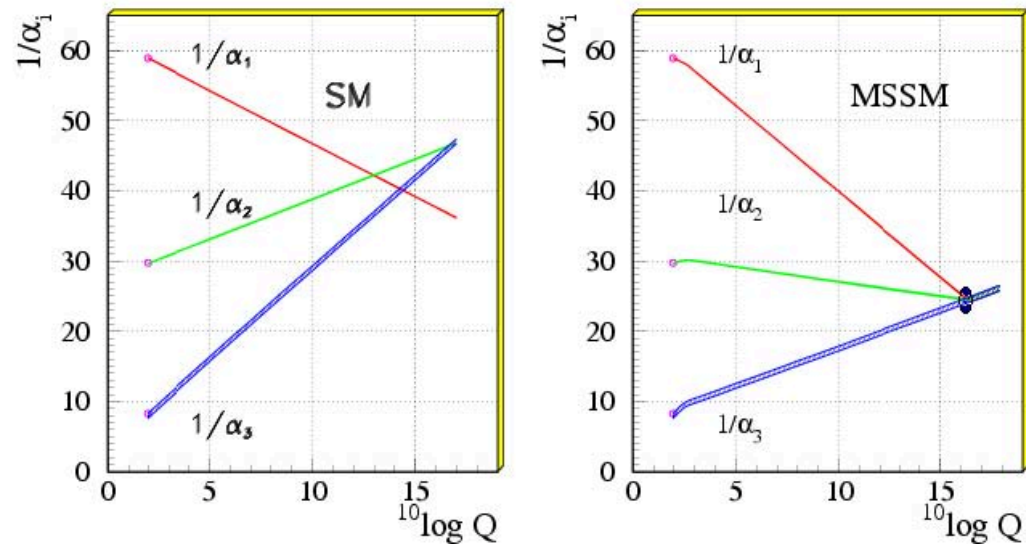


図 1: 非超対称大統一理論 (左) はゲージ結合定数の統一を実現できない．超対称大統一理論 (右) はゲージ結合定数の統一を実現する． $\alpha_i = g_i^2/4\pi$, ($i = 1, 2, 3$) は $U(1), SU(2), SU(3)$ のゲージ結合定数の強さ．実験データをまとめているのは，<http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/gutsrpp.pdf>

5. 制限が強いために**予言力**がある．たとえば，最も軽いヒッグス粒子は量子補正を考慮に入れても 150GeV 程度までに現れるはず．

ヒッグス粒子のポテンシャルのうち，無次元の結合定数で与えられる 4 次の係数はゲージ結合定数のみで決まる．超対称なヒッグスポテンシャルには平らな方向がある．実際にはこのポテンシャルに，超対称性の破れによって生じる項が加わる．最も一般の質量項が加わると考えた上で，望ましいヒッグス場の真空期待値が安定な真空として得られることを要求すると，中性ヒッグス粒子の質量には $m_h \leq m_Z$ という上限が生じる

K. Inoue, A. Kakuto, H. Komatsu, and S. Takeshita, Prog. Theor. Phys. **67** (1982) 1889.

トップクォークが重いために，その湯川結合定数が大きく，それによるヒッグスポテンシャルへの量子効果が大きい．その結果，量子補正を受けると，質量の上限は大きくなり，150GeV 程度まで可能となる

Y. Okada, M. Yamaguchi and T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **85** (1991) 1; H. E. Haber and

R. Hempfling, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1815; J. R. Ellis, G. Ridolfi and F. Zwirner, Phys.

Lett. **B257** (1991) 83.

超対称性理論の課題

超対称性の破れの理解が必要: 非摂動効果が重要 .

超対称性の破れの伝達機構重要 → 余剰次元が役立つ (sequestering) .

4 余剰次元模型 = ブレーンワールド模型

4.1 平坦で大きな余剰次元模型

N.Arkani-Hamed, SDimopoulos, G.Dvali, Phys.Lett.**B429** (1998) 263 ; Kehagias,Sfetsos,
Phys.Lett.**B472** (2000) 39; ...

4次元時空での質量 M の質点を作る重力ポテンシャルは

$$V_{(4)}(r) \equiv -G_N M \frac{1}{r} \quad (4.1)$$

$$\frac{\hbar}{c} \sqrt{\frac{G_N}{\hbar c}} \approx 1.61 \times 10^{-33} \text{cm}, \quad \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \approx 1.22 \times 10^{19} \text{GeV}/c^2. \quad (4.2)$$

この経験法則は

$$r \geq 200 \mu\text{m} \quad (4.3)$$

程度の距離でしか検証されていない .

4次元重力ポテンシャルは

$$V_{(4)}(r) = -G_N M \frac{1}{r} = -M \hbar c \frac{1}{(M_{(4)})^2 r}. \quad (4.4)$$

重力子が $4 + n$ 次元時空に伝播できるとすると,

$$V_{(4+n)}(r) = -G_{4+n} M \frac{1}{r^{n+1}} \quad (4.5)$$

$4 + n$ 次元のうちの n 次元の空間部分が半径 R の円になっているとしよう．鏡像法を用いることができるので，その場合の重力ポテンシャルを求めると，

$$V_{(4+n)}(r) \equiv -G_{4+n} M \sum_{m_1, \dots, m_n} \frac{1}{[r^2 + \sum_{i=1}^n (2\pi R_i m_i)^2]^{\frac{1+n}{2}}} \quad (4.6)$$

次元解析から高次元重力の質量スケール $M_{(4+n)}$ に換算すると

$$G_{n+4} = \frac{1}{(M_{(4+n)})^{2+n}} \hbar c \left(\frac{\hbar}{c} \right)^n \quad (4.7)$$

近距離では境界およびその背後の鏡像はすべて無視できるから $4 + n$ 次元の無限に広がった時空の場合と同じで，

$$V^{(4+n)}(r) \approx -M \frac{1}{(M_{(4+n)})^{2+n} r^{1+n}} \hbar c \left(\frac{\hbar}{c} \right)^n, \quad r \ll R_i. \quad (4.8)$$

遠距離では鏡像が密に分布するので，鏡像の無限和を積分で置き換える近似が良くなる．

$$\begin{aligned}
 V_{(4+n)}(r) &\approx -M \frac{1}{(M_{(4+n)})^{2+n}} \int_{-\infty}^{\infty} d^n m \frac{1}{[r^2 + \sum_{i=1}^n (2\pi R_i m_i)^2]^{\frac{1+n}{2}}} \hbar c \left(\frac{\hbar}{c}\right)^n \\
 &= -M \frac{1}{(M_{(4+n)})^{2+n} R_1 \cdots R_n r} \frac{1 \text{vol}(S^n)}{2} \hbar c \left(\frac{\hbar}{c}\right)^n \equiv -G_N M \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

ここで， n 次元球面の表面積 $\text{vol}(S^n)$ は

$$\text{vol}(S^n) = \frac{2\pi^{\frac{1+n}{2}}}{\Gamma(\frac{1+n}{2})} \quad (4.9)$$

また，長距離での有効重力ポテンシャルは4次元時空におけるものと同じふるまいとなり，その有効重力定数は基本理論の高次元時空での重力定数で次のように表されている．

$$G_N = \frac{G_{4+n} \text{vol}(S^n)}{2\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)} \approx \frac{G_{4+n}}{R_1 \cdots R_n} \quad (4.10)$$

$$M_P^2 = (M_{(n+4)})^{2+n} R_1 \cdots R_n \left(\frac{c}{\hbar}\right)^n \quad (4.11)$$

ニュートンポテンシャルに対する補正項:

ポアソン和公式, またはモード展開を用いる →

コンパクトな空間についてのさまざまなモードの質量 m について, 湯川型の指数関数的に減少する項 e^{-mr} が補正項として得られる.

基本理論のパラメータ G_{4+n} のスケール $M_{(4+n)}$ が TeV 程度 (電弱相互作用のスケール) であるとする, ニュートン万有引力定数として観測されている重力のスケールを説明するには, 余剰次元が 2 以上 ($n \geq 2$) であれば現在の実験誤差の範囲内になる.

$D = 6$ 次元時空またはそれ以上の次元の重力理論が基本理論であれば, 重力ポテンシャルのニュートン法則からのずれは実験で観測されている限界内に収まる.

精密実験で, ニュートンの法則からのずれが観測できる.

標準模型に登場する粒子は, 高次元時空で伝播しているという積極的証拠はない. むしろ, TeV のようなエネルギーに対応する長さのスケール, あるいはそれよりも大きな余剰次元に広がっているとすると, 実験で確かめられている現象と矛盾する. したがって, 標準模型の粒子は通

常は4次元的に広がった壁状の部分空間，すなわち**ブレーンに局在**していると仮定する．

TeV程度の基本的スケールを持つ重力理論を考えるので，LHCのような高エネルギー加速器で**重力の量子効果**が見える可能性がある．たとえば**ブラックホール**がたくさん**加速器で生成**されるかもしれない．

4.2 ワープ計量模型

Randall, Sundrum, Phys.Rev.Lett.**83** (1999) 3370; 4690; …

余剰次元 y が周期 $2\pi r_c$ で周期的であるとする: $y = y + 2\pi r_c$

オービフォールド: y と $-y$ を同一視する (折り返し対称) .

$y = \pi r_c$ が固定点 = 壁 (ブレーン) があることになる .

宇宙項のある 5 ($1 + d, d = 4$) 次元重力理論とブレーン

$$S = S_{\text{bulk}} + S_{\text{brane}} \quad (4.12)$$

$$S_{\text{bulk}} = \frac{1}{\kappa_{d+1}^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-G} \left[-\frac{1}{2}R - \Lambda \right] \quad (4.13)$$

$$S_{\text{brane}} = \frac{1}{\kappa_{d+1}^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-G} [-V_1 \delta(y) - V_2 \delta(y - \pi r_c)] \quad (4.14)$$

アインシュタイン方程式

$$R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R = \Lambda G_{MN} + g_{mn} \delta_M^m \delta_N^n [V_1 \delta(y) + V_2 \delta(y - \pi r_c)]$$

解: ワープ計量 (Warped metric) Randall-Sundrum 模型

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (dy)^2 \quad (4.15)$$

$$k = \sqrt{\frac{-2\Lambda}{6}}, \quad V_1 = -V_2 = \sqrt{\frac{-3\Lambda}{2}} \quad (4.16)$$

5次元時空の宇宙項と4次元の壁(ブレーン)上の宇宙項との間に関係がないといけない。

5次元宇宙項は負でなければならない。

Randall-Sundrum 模型の良い点

1. $y = 0$ のブレーン上のスケールに比して, $y = \pi r_c$ のブレーン上のスケールが指数関数的に小さい。

ゲージ階層性問題そのものが存在しない。

2. $y = 0$ のブレーン上に重力子が局在する .
3. $y = 0$ 上の物質間の重力はニュートンの万有引力の法則と矛盾しない .
補正項は $1/r$ より高いべきで減少する . 精密実験で測定が可能であろう .
4. 超対称性を取り入れることができる .
5. 一方のブレーンで超対称性が破れ , もう一方のブレーン上に超対称標準模型があるとすると , 超対称性の破れが小さいことが理解でき , 破れのよい模型になる .

Randall-Sundrum 模型の問題点

1. 望ましい要素を多く持っているが , 必ずしもそれらの要素を両立させることができているわけではない .
2. 現実的な模型にしようとするれば , パラメーターが増える .
3. ブレーンの安定化の機構を考えることができるが , 複雑 (パラメーターが多い) か , 不自然な模型が多い .

4.3 BPSソリトン

ブレーン＝位相欠陥：ドメイン・ウォール, 渦糸, ... など

できればソリトンとして構成したい

標準模型の粒子が壁状のブレーンに閉じ込められている必要がある。

安定性・ブレーンの構成 → 超対称性が有用

超伝導体中の渦糸 (マイスナー効果)

Landau-Ginzburg 模型: $U(1)$ ゲージ場と荷電スカラー場 ϕ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{D}^\mu \phi (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger - \frac{\lambda}{4} (\phi\phi^\dagger - v^2)^2 \quad (4.17)$$

渦糸の安定性: 位相的量子数 (渦度)

$$k = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x F_{12} \quad (4.18)$$

渦糸の位置不定: 解のパラメタ = モジュライ → 質量零の粒子

渦糸が複数ある場合

$U(1)$ ゲージ相互作用: 斥力, スカラー力: 引力

$\lambda < e^2$: 渦糸は反発しあう (第2種, アプリコソフ格子)

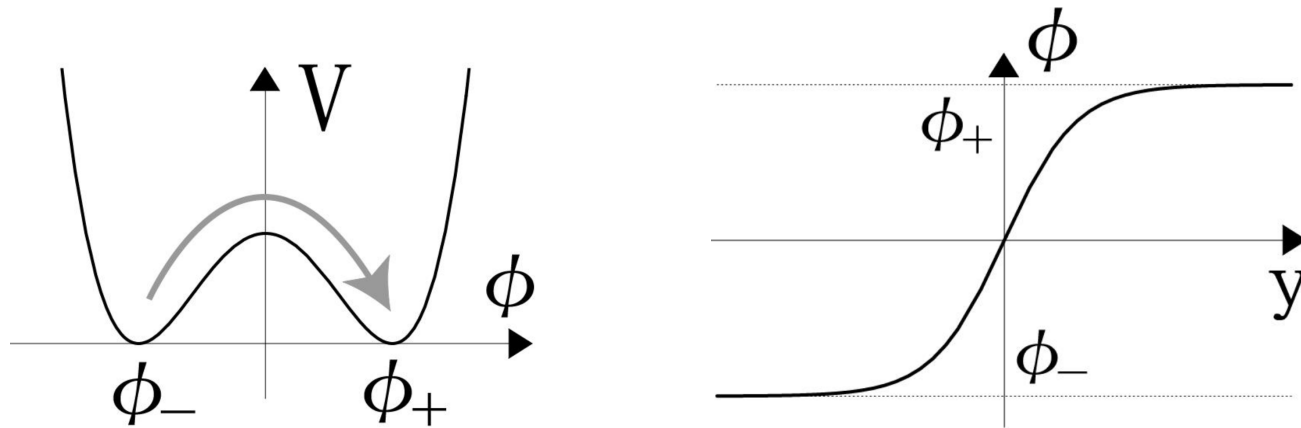
$\lambda > e^2$: 渦糸は引き付けあう

$\lambda = e^2$: 渦糸の間に力が働かない \rightarrow BPS 状態

このとき, 相対位置はモジュライ \rightarrow 質量零の粒子

BPS 渦糸は超対称 (SUSY) 理論に埋め込むことができる.

5 ソリトンとしての壁 (ドメイン・ウォール)



複数の最低状態 (真空) \rightarrow 二つの真空を結ぶキネクが生じ得る.

エネルギー密度は局在する: 壁 (ドメイン・ウォール)

無限遠での境界条件が非自明 \rightarrow 位相不変量 $\pi_0(\mathcal{M})$

二重井戸型ポテンシャルを持つ実スカラー場 ϕ ($\lambda > 0$)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \lambda(\phi^2 - v^2)^2 \quad (5.1)$$

離散的真空: $\phi_+ \equiv v, \phi_- \equiv -v$

$y = x^2$ にだけ依存すると仮定

エネルギー密度の**ボゴモルニイ完成**

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= (\partial_y \phi)^2 + \lambda(\phi^2 - v^2)^2 \\ &= (\partial_y \phi + \sqrt{\lambda}(\phi^2 - v^2))^2 + \partial_y \left[2\sqrt{\lambda} \left(v^2 \phi - \frac{\phi^3}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

位相不変量がエネルギー - の下限を与える

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \mathcal{E} \geq \left[2\sqrt{\lambda} \left(v^2 \phi - \frac{\phi^3}{3} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \quad (5.2)$$

Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) 限界

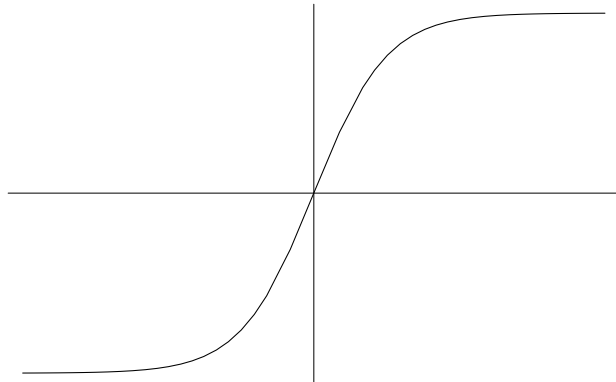
Bogomol'nyi, *Sov.J.Nucl.Phys.* **24** (1976) 449; Prasad and Sommerfield, *Phys.Rev.Lett.* **35** (1975) 760.

BPS 方程式が成り立つときに, この限界が飽和するのは

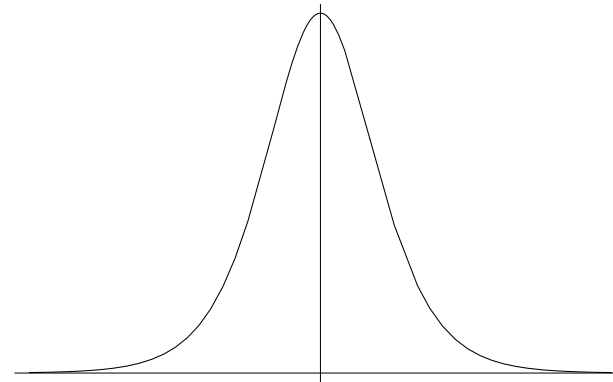
$$\partial_y \phi + \sqrt{\lambda}(\phi^2 - v^2) = 0 \quad (5.3)$$

壁がひとつだけある解:

$$\phi = v \tanh(\sqrt{\lambda}vy) \quad (5.4)$$



(a) 壁の BPS 解

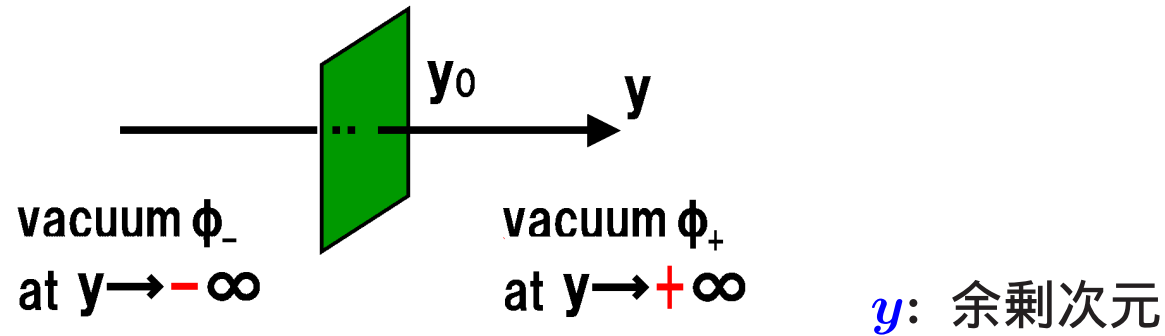


(b) 南部・ゴールドストーン粒子の波動関数

南部・ゴールドストーン粒子の波動関数

$$\frac{d\phi_{cl}}{dy} = \frac{\sqrt{\lambda}v^2}{\cosh^2(\sqrt{\lambda}vy)}$$

References



6 $U(N_C)$ ゲージ理論, N_F ヒッグススカラー場

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{MN}(W)F^{MN}(W)) + \frac{1}{g^2} \text{Tr}(\mathcal{D}^M \Sigma \mathcal{D}_M \Sigma) + \text{Tr}[\mathcal{D}^M H (\mathcal{D}_M H)^\dagger] - V \quad (6.1)$$

$$V = \frac{g^2}{4} \text{Tr}[(HH^\dagger - c1_{N_C})^2] + \text{Tr}[(\Sigma H - H M)(\Sigma H - H M)^\dagger]$$

$$\mathcal{D}_M H^i = (\partial_M + iW_M)H^i, \quad \mathcal{D}_M \Sigma = \partial_M \Sigma + i[W_M, \Sigma]$$

$$F_{MN}(W) = \partial_M W_N - \partial_N W_M + i[W_M, W_N]$$

W_M ゲージ場, Σ 実スカラー場 ($N_C \times N_C$ 行列)

$U(N_C)$ ゲージ結合定数 g

複素ヒッグススカラー場 : $H^{rA} \equiv H^{rA}$ ($N_C \times N_F$ matrix)

($i = 1, 2$; カラー $r = 1, \dots, N_C$; フレーバー $A = 1, \dots, N_F$)

二重井戸ヒッグスポテンシャル, ヒッグス質量 $(M)^A_B \equiv m_A \delta^A_B$

質量縮退しない場合 : $m_A > m_{A+1} \rightarrow$ 対称性 : $U(1)_F^{N_F-1}$

完全縮退の場合 : 質量パラメタは Σ のシフトで消せる

5次元時空 $\rightarrow M, N, \dots = 0, 1, 2, 3, 4$

このラグランジアンは超対称理論 (8 SUSY) に埋め込める .

離散的真空 : カラー・フレーバー・ロッキング $\langle A_1 A_2 \dots A_{N_C} \rangle$

$$H H^\dagger = c 1_{N_C}, \quad \Sigma H - H M = 0 \quad (6.2)$$

$$H^{rA} = \sqrt{c} \delta^{Ar}_A, \quad \Sigma = \text{diag}(m_{A_1}, \dots, m_{A_{N_C}}) \quad (6.3)$$

真空の種類: $\frac{N_F!}{(N_F - N_C)! N_C!} \sim e^{N_F \log(x^{-x}(1-x)^{-(1-x)})}$, $x \equiv N_C / N_F$

ヒッグス相 : 壁 (ドメイン・ウォール), 渦糸 だけが基本的 ソリトン

インスタントン, 磁気単極子, ジャンクション は複合ソリトン

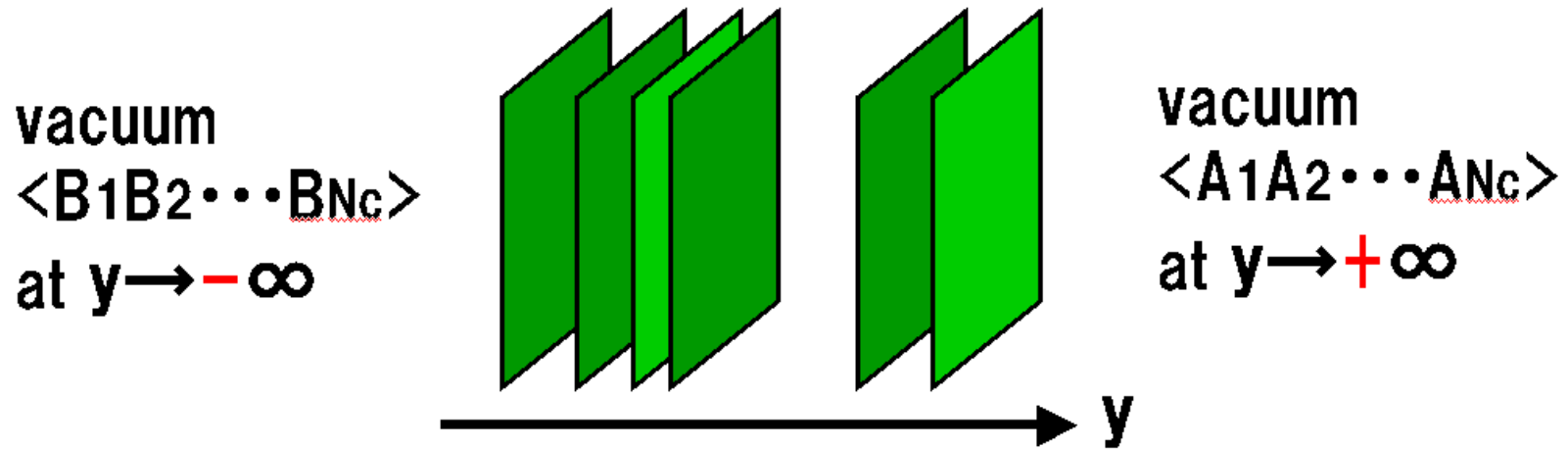


図 2: 真空 $\langle A_1 A_2 \dots A_{N_C} \rangle$ と $\langle B_1 B_2 \dots B_{N_C} \rangle$ を結ぶ多重壁.

7 1/2 BPS 壁

1/2 BPS 方程式

$y \equiv x^4$ にのみ依存, 4 D ポアンカレ不変性 $\rightarrow W_{M \neq y} = 0$

エネルギー密度 \mathcal{E} のボゴモルニイ完成

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \text{Tr} \left[|\mathcal{D}_y H^{rA}|^2 \right] + \text{Tr} \left[|\Sigma H - HM|^2 \right] \\
 &+ \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left((\mathcal{D}_y \Sigma)^2 \right) + \frac{g^2}{4} \text{Tr} \left[(HH^\dagger - c1_{N_C})^2 \right] \\
 &= \text{Tr} |\mathcal{D}_y H + \Sigma H - HM|^2 \\
 &+ \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left(\mathcal{D}_y \Sigma - \frac{g^2}{2} (c1_{N_C} - HH^\dagger) \right)^2 + c \partial_y \text{Tr} \Sigma \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

1/2 BPS 方程式 \iff 超対称性を半分保存: $\gamma^4 \epsilon^i = -i(\sigma^3)^i_j \epsilon^j$

$$\mathcal{D}_y H = -\Sigma H + HM, \quad \mathcal{D}_y \Sigma = g^2 (c1_{N_C} - HH^\dagger) / 2 \quad (7.2)$$

トポロジカル・セクター labeled by $\langle A_1 A_2 \cdots A_{N_C} \rangle \leftarrow \langle B_1 B_2 \cdots B_{N_C} \rangle$

壁の張力の BPS 限界

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} dy \geq c \left[\text{Tr}(\Sigma) \right]_{-\infty}^{+\infty} = c \left(\sum_{k=1}^{N_C} m_{A_k} - \sum_{k=1}^{N_C} m_{B_k} \right) \quad (7.3)$$

BPS 方程式を解く

$\Sigma + iW_y \equiv S^{-1}(y)\partial_y S(y)$ で $S(y) \in GL(N_C, \mathbb{C})$ を定義する

ヒッグス場のBPS方程式の解: $H(y) = S^{-1}(y)H_0 e^{My}$

“モジュライ行列” H_0 は複素 $N_C \times N_F$ 定数行列

ゲージ場BPS方程式 \rightarrow マスター方程式: ゲージ不変量 $\Omega \equiv S S^\dagger$

$$\partial_y (\Omega^{-1} \partial_y \Omega) = g^2 c (1_C - \Omega^{-1} \Omega_0), \quad \Omega_0 \equiv c^{-1} H_0 e^{2My} H_0^\dagger$$

$H_0 \rightarrow \Omega(y) \rightarrow$ ゲージ固定 $\rightarrow S(y) \rightarrow \Sigma, W_y, H^1$

$y = \pm\infty$ での境界条件 \rightarrow マスター方程式の解の存在と一意性

インデックス定理, $U(1)$ ゲージ理論では解の存在と一意性の証明あり

モジュライ行列 H_0 はモジュライ空間を完全に記述する

全モジュライ空間

グローバル“ V -対称性”: (S を求める際の N_C^2 個の積分定数)

(S, H_0) と (S', H_0') は同じ物理量 $H = S^{-1} H_0 e^{My}$ (Σ, W_y) を与える

$$S \rightarrow S' = V S, \quad H_0 \rightarrow H_0' = V H_0, \quad V \in GL(N_C, \mathbb{C})$$

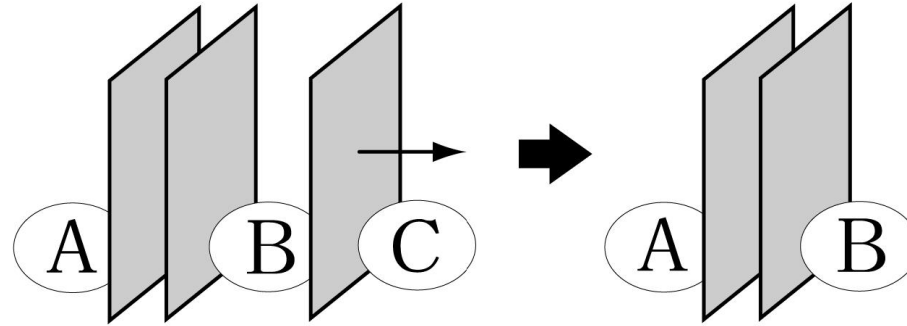


図 3: 真空 A から B を経て C へ結ぶ 3 重壁の解 (左図) で, 左端の壁を無限遠に送ると, 真空 A, B を結ぶ 2 重壁の解を得る (右図) .

BPS 方程式の全モジュライ空間は **複素グラスマン多様体**:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{H_0 | H_0 \sim V H_0, V \in GL(N_C, \mathbb{C})\} \equiv G_{N_F, N_C} \\ &\simeq \frac{SU(N_F)}{SU(N_C) \times SU(N_F - N_C) \times U(1)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

コンパクト (閉) 空間で複素次元が $N_C \tilde{N}_C \equiv N_C(N_F - N_C)$

最大のトポロジカルセクター: $\langle 1, \dots, N_C \rangle \leftarrow \langle \tilde{N}_C + 1, \dots, N_F \rangle$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{N_F, N_C}^{\langle 1, \dots, N_C \rangle \leftarrow \langle \tilde{N}_C + 1, \dots, N_F \rangle} = 2N_{\text{wall}} = 2N_C \tilde{N}_C \quad (7.5)$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{1/1} + \mathcal{M}^{1/2} = \mathcal{M}^0 \oplus \mathcal{M}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}^{N_C \tilde{N}_C} \quad (7.6)$$

モジュライ行列 H_0 : 各成分は真空の重みを表す

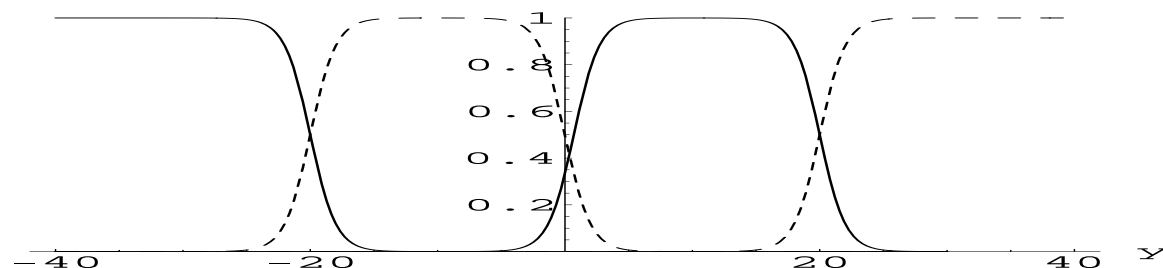


図 4: ヒッグス場が急激に変化するところが壁の位置.

$U(1)$ の場合 : $H_0 = (e^{r_1}, e^{r_2}, \dots, e^{r_{N_F}})$,

$$H = S^{-1} H_0 e^{My} = S^{-1} (e^{r_1 + m_1 y}, \dots, e^{r_{N_F} + m_{N_F} y}) \quad (7.7)$$

i と $i + 1$ 真空を隔てる壁の位置は $\text{Re} r_i + m_i y \sim \text{Re} r_{i+1} + m_{i+1} y$

$\text{Im}(r_i - r_{i+1})$: 壁が隔てる二つの真空の相対位相

非アーベルゲージ理論の場合 $U(N_C)$: $\tilde{N}_C \equiv N_F - N_C$

BPS 壁上の有効作用

モジュライをソリトン上の場に格上げする (T_w : 壁の張力)

$$\mathcal{L} = -T_w + \int d^4\theta K(\phi, \phi^*) + \text{高次微分項} \quad (7.8)$$

$$K(\phi, \phi^*) = \int dy \left[c \log \det \Omega + c \text{Tr} (\Omega_0 \Omega^{-1}) + \frac{1}{2g^2} \text{Tr} (\Omega^{-1} \partial_y \Omega)^2 \right] \Big|_{\Omega = \Omega_{\text{sol}}}$$

超対称性が残っているなので，ケーラーポテンシャル K で記述できる

強結合 ($g \rightarrow \infty$) での厳密解: 非線形シグマ模型

強結合 $g^2 c / \Delta m \gg 1$: マスター方程式は**代数的に解ける**

$$\Omega = \Omega_0 \equiv c^{-1} H_0 e^{2My} H_0^\dagger \quad (7.9)$$

$g^2 \rightarrow \infty$: ハイパーケーラー **非線形シグマ模型** (NLSM)

8 Conclusion

1. 標準模型は現在までの実験事実を記述する上で矛盾はない。
2. ニュートリノ振動が観測されたので，最小標準模型は修正が必要。
3. 標準模型を超える統一理論は，ゲージ階層性問題が重要な手がかり。
4. ゲージ階層性問題を解決するには，3つの可能性がある。
5. ヒッグス場が基本粒子ではないと考える，複合ヒッグス模型は興味深い，実験と矛盾しない現実的な模型はまだこれから。

6. 超対称性は，対称性の観点からヒッグス粒子の質量が小さいことを説明する．
7. 余剰次元模型(ブレンワールド模型)は，基本理論のスケールがTeV程度になるので，ゲージ階層性問題そのものが存在しないと考える．多くの興味深い可能性を含むことが示されている．
8. ソリトンはブレン・ワールド模型や非摂動効果に重要である．
9. (超対称) $U(N_C)$ ゲージ理論で， N_F 個の基本表現のヒッグススカラー場がある場合に，BPS ソリトンを構成した．
10. 壁(ドメイン・ウォール)の全モジュライ空間はモジュライ行列 H_0 で記述され，コンパクト複素グラスマン多様体となる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{N_F, N_C} &\simeq \{H_0 | H_0 \sim V H_0, V \in GL(N_C, \mathbb{C})\} \\
&\simeq G_{N_F, N_C} \simeq \frac{SU(N_F)}{SU(N_C) \times SU(\tilde{N}_C) \times U(1)} \quad (8.1)
\end{aligned}$$

11. 強結合 ($g^2 \rightarrow \infty$) では，完全に一般的なモジュライを持った壁(ドメイン・ウォール)の厳密解を得た．
12. BPS ソリトンの有効ラグランジアンに対する一般公式を求めた．

References of Solitons in 8 SUSY Theories

Tokyo Tech Collaboration

1. Review

“Solitons in the Higgs Phase: Moduli matrix approach”,
hep-th/0602170, J. Phys. A **39** (2006) R315-392,

2. Domain Walls in 5D Supersymmetric Theories

“Moduli space of BPS walls in supersymmetric gauge theories”, hep-th/0503136, Com. Math. Phys.

“Global structure of moduli space for BPS walls”,
hep-th/0503033, Phys.Rev.**D71** (2005) 105009,

“D-brane Construction for Non-Abelian Walls”, hep-th/0412024,
Phys.Rev.**D71**, 125006 (2005),

“Non-Abelian Walls in Supersymmetric Gauge Theories”,
hep-th/0405194, Phys.Rev.**D70** (2004) 125014,

“Construction of Non-Abelian Walls and Their Complete Moduli Space”,
hep-th/0404198, Phys.Rev.Lett.**93** (2004) 161601,

“Exact Wall Solutions in **5**-Dimensional SUSY QED”,
hep-th/0310189, JHEP **11** (2003) 060,

- “Massless Localized Vector Field on a Wall in Five Dimensions”,
 hep-th/0310130, JHEP **11** (2003) 061,
- “Vacua of Massive Hyper-Kähler Sigma Models with Non-Abelian Quotient”,
 hep-th/0307274, Prog. Theor. Phys. **113** (2005) 657,
- “Manifest Supersymmetry for BPS walls in $\mathcal{N} = 2$ nonlinear sigma models”, ,
 hep-th/0211103, Nucl.Phys.**B652** (2003) 35-71,
- “ BPS Wall in $\mathcal{N} = 2$ SUSY Nonlinear Sigma Model with Eguchi-Hanson Manifold”,
 hep-th/0302028, in “Garden of Quanta”- In honor of Hiroshi Ezawa, pages 299–325,

3. Vortex

- “Non-Abelian Vortices on Cylinder— Duality between vortices and walls” ,
 hep-th/0601181, Phys.Rev.**D73** (2006) 085008,
- “Moduli Space of Non-Abelian Vortices” ,
 hep-th/0511088, Phys.Rev.Lett.**96** (2006) 161601,
- “Effective Theory on Non-Abelian Vortices in Six Dimensions” ,
 hep-th/0405161, Nucl.Phys.**B701**, 247 (2004),

4. $1/4$ BPS states

- “ Effective Action of Domain Wall Networks”, hep-th/0612003,
 Phys.Rev.**D75** (2007) 045010,
- “ Non-Abelian Webs of Walls”, hep-th/0508241, Phys.Lett. **B632** (2006) 384-392,

“ Webs of Domain Walls in Supersymmetric Gauge Theories”, hep-th/0506135,
 Phys.Rev.**D72** (2005) 085004,
 “Monopoles, Vortices, Domain Walls and D-branes: The rules of Interaction”,
 hep-th/0501207, JHEP 03 (2005) 019,
 “Instantons in the Higgs Phase”, hep-th/0412048, Phys. Rev. **D72**, 025011 (2005),
 “All Exact Solutions of a $\mathbf{1/4}$ Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield Equation”,
 hep-th/0405129, Phys.Rev.**D71**, 065018 (2005),
 “Domain Wall Junction in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QED in four dimensions” ,
 hep-th/0306077, Phys.Rev.**D68** (2003) 065005-1-16,
 “BPS Lumps and Their Intersections in $\mathcal{N} = 2$ SUSY Nonlinear Sigma Models” ,
 hep-th/0108133, Grav.Cosmol.**8** (2002) 129-137,

5. Non-BPS Walls and Supersymmetry Breaking

“Non-BPS Walls and their stability in 5D Supersymmetric Theory” ,
 hep-th/0404114, Nucl.Phys.**B696** (2004) 3-35,

6. Effective Lagrangian

“ Manifestly Supersymmetric Effective Lagrangians on BPS Solitons” ,
 hep-th/0602289, Phys.Rev.**D73** (2006) 125008,

7. Wall Solution in Supergravity

“ Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield Multiwalls in Five-Dimensional Supergravity” ,

hep-th/0306196, Phys.Rev.**D69** (2004) 025007,
“ Wall solution with weak gravity limit in five-dimensional Supergravity” ,
hep-th/0212175, Phys.Lett.**B556** (2003) 192-202,

Solitons in 8 SUSY Theories

1. Early works

M. Cvetič, F. Quevedo and S. J. Rey, Phys.Rev.Lett.**67**, 1836 (1991)

E. Abraham and P. K. Townsend, Phys.Lett.**B 291**, 85 (1992)

M. Cvetič, S. Griffies and S. J. Rey, Nucl.Phys.B **381**, 301 (1992)

M. Cvetič, S. Griffies and H. H. Soleng, Phys.Rev.D **48**, 2613 (1993)

G. Dvali and M. Shifman, Phys.Lett.**B396**, 64 (1997)

2. Wall Solution in 8 SUSY Models

J. P. Gauntlett, D. Tong, and P. K. Townsend, Phys.Rev.**D63**, 085001 (2001);

J. P. Gauntlett, R. Portugues, D. Tong, P. K. Townsend, Phys.Rev.**D63**, 085002 (2001);

J. P. Gauntlett, D. Tong, and P. K. Townsend, Phys.Rev.**D64**, 025010 (2001)

R. Portugues, P. K. Townsend, JHEP **0204** 039, (2002)

D. Tong, Phys.Rev.**D66**, 025013 (2002) “The Moduli Space of BPS Domain Walls”

M. Shifman and A. Yung, Phys.Rev.**D67**, 125007 (2003)

D. Tong, JHEP **0304**, 031 (2003) “Mirror Mirror on the Wall”

M. Arai, E. Ivanov and J. Niederle, Nucl.Phys.**B680**, 23 (2004)

M. Shifman and A. Yung, Phys.Rev.**D70**, 025013 (2004)

3. Monopoles in Higgs Phase

D. Tong, Phys.Rev.**D69**, 065003 (2004)

R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi and A. Yung, Nucl.Phys.**B673**, 187 (2003)

R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin and K. Konishi, Nucl.Phys.B **686**, 119 (2004)

M. Shifman and A. Yung, Phys.Rev.D **70**, 045004 (2004)

R. Auzzi, M. Shifman and A. Yung, JHEP **0502** (2005) 046

4. Vortex

A. Hanany and D. Tong, JHEP **0307**, 037 (2003)

R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi and A. Yung, Nucl.Phys.B **673**, 187 (2003)

M. Shifman and A. Yung, Phys.Rev.D **70**, 045004 (2004)

A. Hanany and D. Tong, JHEP **0404**, 066 (2004)

A. Hanany and D. Tong, arXiv:hep-th/0507140;

M. A. C. Kneipp and P. Brockill, Phys.Rev.D **64**, 125012 (2001)

M. A. C. Kneipp, Phys.Rev.D **68**, 045009 (2003) ; Phys.Rev.D **69**, 045007 (2004)

5. Brane construction

R. Auzzi, S. Bolognesi and J. Evslin, JHEP **0502** (2005) 046.

6. Index theorem

K. S. M. Lee, Phys.Rev.D **67**, 045009 (2003)

introduction